PRINCIPII

DELLA

TEORIA MATEMATICA

DEL

MOVIMENTO DEI CORPI

CORSO DI MECCANICA RAZIONALE

DI

GIAN ANTONIO MAGGI

PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI MESSINA.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

1896.

INDICE DELLE MATERIE

PRELIMINARI.

CINEMATICA.

CAPITOLO I. — SPOSTAMENTO.

CAPITOLO II. — MOVIMENTO.

CAPITOLO III. — VELOCITÀ.

CAPITOLO IV. — ACCELERAZIONE.

DINAMICA.

PARTE PRIMA.

Leggi generali del movimento.

CAPITOLO I. — MASSA E FORZA MOTRICE.

CAPITOLO II. — PROPRIETÀ GENERALI DEL MOVIMENTO.

CAPITOLO III. — Gravità.

PARTE SECONDA.

Calcolo del movimento.

CAPITOLO I. — CORPI RIGIDI LIBERI.

CAPITOLO II. — PRESSIONE.

CAPITOLO III. — CORPI RIGIDI VINCOLATI.

CAPITOLO IV. — CORPI VARIABILI.

PREFAZIONE

Questo libro, elaborato sopra uno de' miei corsi di Fisica Matematica, ha per principale oggetto di stabilire i principii della Meccanica Razionale, in un modo che sembra a me possedere qualche notevole vantaggio dal lato della chiarezza e del rigore.

A tal fine, per quanto riguarda la sostanza dei principii medesimi, mi sono attenuto a quell'idea della Filosofia Naturale — per adoperare il termine di *Newton*, religiosamente conservato dai suoi compaesani — che riduce la spiegazione d'un fenomeno alla determinazione della logica connessione d'un fatto ideale, parziale immagine del fenomeno, in quanto che ne riproduce alcuni aspetti, con certi fatti che si assumono come postulati cardinali, e hanno la loro ragion d'essere in una simile riproduzione di leggi generali della Natura. Idea che, mentre lascia sempre adito alla ricerca d'una spiegazione più soddisfacente, come quella che abbraccia un maggior numero d'aspetti, e s'appoggia su più ampi postulati, mette da parte quella spiegazione *vera*, che fa respingere tutte le possibili, per distruggere in alcuni ogni fede nella Scienza, e trarre altri a cercare ciò che presumibilmente non è conseguibile.

Con ciò noi domandiamo meno, e ben poco, in confronto di chi aspira alle ragioni ultime: o qualcosa d'appresso. Di più la nostra limitata fiducia non ci consente. In compenso, non sarà a cagion nostra che per avventura si accuserà la Scienza di venir meno alle sue promesse.

Tale idea, ben lontano da nuova, non ebbe però forse in nessun momento così ampia adesione quanto in questi ultimi

tempi. Informato sostanzialmente ad essa, *Kirchhoff* ha fondato la classica " Meccanica „ * sul concetto che suo compito sia puramente la descrizione completa e più semplice dei movimenti che avvengono in Natura. ** Così, il movimento dei pianeti, descritto dall'Astronomia colle leggi di *Kepler*, lo sarà dalla Meccanica con quella di *Newton.* *** Diremmo che, di quell'idea, *Kirchhoff* arriva alle ultime conseguenze, se non va forse anche alquanto oltre, rinunciando a formulare ogni principio generale del movimento dei corpi: col significato che a questo termine sogliamo attribuire; quello cioè d'una legge che raccoglie il risultato della più larga esperienza, e, sotto un certo aspetto, la somma dei fatti appartenenti al campo considerato. Non credo che si possa esimersi dal desiderare la scorta di tali principii, quando, per seguire l'ordine di quell'esposizione, ci si affaccia il problema dei tre corpi **** — e domandiamo alla Meccanica di prevenire l'Astronomia, con che *Leverrier* trarrà dal calcolo l'esistenza di Nettuno — per illuminare la scelta della migliore ipotesi, e corroborarla quanto occorre perchè ci riponiamo sufficiente fiducia.

Per ciò, pur ispirandomi a quell'opera insigne, ho creduto di assegnare all'Esperienza la parte, che d'altronde mi pare più conforme a quella ch' ebbe realmente nella costituzione stessa della Meccanica. Ho quindi seguito la tradizione nel premettere alla Dinamica alcuni postulati, che ne costituiscono le leggi generali; i quali però non sono gli ordinarii, ma più simili a quelli che propone il *Mach,* ***** e collimano coi concetti di *Clifford.* ******

I nostri postulati si distinguono sostanzialmente perciò che esprimono direttamente proprietà dei corpi anzi che dei così detti " punti materiali „; il cui intervento ho creduto di esclu-

---

* *Vorlesungen über Mathematishe Physik — Mechanik* — Leipzig, 1879.

** Als ihre Aufgabe (der Mechanik) bezeichnen wir: die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen *vollständig und auf die einfachste Weise* zu beschreibein. Vorrede, 1.te Vorles. § 1.

*** Ibid. § 6.

**** Ibid. § 8.

***** *Die Mechanik in ihrer Entwickelung* — Leipzig, 1883 — Kap. II, § 7.

****** *The common sense of the exact sciences* — London, 1885 — Chap. V, § 11, e Pref. (O la traduzione italiana — *Il senso comune nelle scienze esatte* — Milano, Dumolard, 1886.)

dere, non valendomi del termine che talvolta, per brevità di discorso, e sempre in modo da passare immediatamente all'espressione che si applica ai corpi senz' altro.

Inteso che il concetto di limite sia il fondamento dell'Analisi Infinitesimale, che costituisce il nostro sostanziale strumento, mi sono proposto di evitare ogni idea, che, tratta originariamente dal concetto d'indivisibile, non si può adattare a quello di limite senza un certo sforzo, e principalmente a condizione che il termine adoperato per designarla perda la sua ragione, o la sua opportunità, per modo che, anzi che servire di schiarimento, più facilmente può tornare d'ostacolo a formar l'idea che vorremmo. Perciò sono ricorso a concetti affini; come, per esempio, a ciò ch' io chiamo " atto di movimento „, che sostituisce lo spostamento infinitamente piccolo, e la " forza elementare „, che tien luogo della forza agente tra due punti materiali; e talvolta mi bastò anche semplicemente di tornare a qualche idea più antica, come il " momento „ in confronto del lavoro corrispondente ad uno spostamento infinitesimo. Ne viene di conseguenza un linguaggio alquanto insolito, che il lettore mi vorrà perdonare. Chè a tale inconveniente non ho mancato di pensare; ma mi è parso insignificante; e non così il vantaggio che da quel modo ritrae la chiarezza dell'esposizione.

La misura del libro è quella dei corsi dond' è ricavato; ed infatti io lo destinerei ad una lettura seguita, che da alcuni fra i concetti più elementari comuni alle varie scienze esatte, brevemente esposti, — quanto basta, e non altro, per richiamarli, nella forma che meglio risponde al contesto — conduca al calcolo delle principali forme di movimento. Così, il quadro è qualcosa più esteso che il solito dei trattati di Meccanica Razionale; ma assai meno riempito; avendo creduto di toccare appena alcuni argomenti, e d'ommettere altri, che non giovavano abbastanza al nostro scopo principale, perchè non mi parresse di poterli sacrificare a quella limitazione delle proporzioni del trattato, che, per le precedenti ragioni, m' ero proposto.

I suddetti concetti elementari sono esposti nei " Preliminari „. Segue la " Cinematica „: e cioè lo studio dei principali elementi, che servono per la descrizione d'un movimento dato,

considerato in sè stesso: divisa in quattro capitoli, che trattano dello " Spostamento „, del " Movimento „, della " Velocità „, e dell' " Accelerazione „.

La Dinamica, o studio del movimento in rapporto colle circostanze atte a determinarlo, è divisa in due parti; la prima, col titolo di " Leggi generali del movimento „, riserbata a fondare innanzi tutto il concetto veramente cardinale della Massa, col quale si connette immediatamente quella della Forza, e, col solo aiuto di questi, esporre, per quanto è possibile, la teoria del movimento: senza preoccuparci del calcolo propriamente detto, in ogni caso speciale, ma preparandoci intanto, in certo qual modo, un modello, distinto per economia di sussidi, a cui informare la trattazione seguente. La quale, più specialmente dedicata al problema della effettiva determinazione delle varie specie di movimenti naturali, nel significato che abbiamo dichiarato in principio, evitando l'ostacolo di quegli elementi le cui qualità non abbiamo ancora potuto indagare quanto basta, costituisce la parte recante, per questo, il titolo di " Calcolo del Movimento „.

La prima parte si divide in tre capitoli: " Massa e Forza motrice „, " Proprietà generali del movimento „, e " Gravità „; l'ultimo dei quali ci serve, e per illustrare con un'applicazione i due precedenti, e per completare la definizione dei concetti di massa e di forza motrice col loro significato famigliare. La seconda parte si divide in quattro capitoli: " Corpi rigidi liberi „, " Pressione „, " Corpi rigidi vincolati „ e " Corpi variabili „: nel primo e terzo dei quali si troveranno le principali proposizioni relative al così detto equilibrio e movimento di un sistema di punti materiali, libero e vincolato, mentre il terzo e il quarto comprendono i principii dell'Idrostatica e dell'Idrodinamica, oltre gli elementi della teoria dell'Elasticità. Questi vari argomenti formano poi un tutto connesso, raccolto sotto il concetto generale della " pressione „, e la corrispondente forma generale dell'equazione di *d'Alembert* e *Lagrange*.

Ho riflesso se fare una più larga parte alle relazioni fra la teoria del movimento e quella dell' " energia „ in generale: le quali si trovano semplicemente accennate in qualche punto; e,

per l'intento del libro, non mi è parso conveniente. Nostro oggetto è infatti la teoria del movimento dei corpi, nel senso comunemente inteso, alla quale presumibilmente nessun progresso potrà togliere l'opportunità di dedicare un trattato. E se qualche cospicuo risultato ha raccolto la ricerca di un principio, donde scaturiscano, come da una comune sorgente, le teorie razionali degli svariati fenomeni, di cui il concetto più generale dell'energia rivela la stretta affinità, questo concetto, coll'estensione necessaria a tale scopo, non si può stabilire senza uscire dai confini della teoria del movimento dei corpi, e rinunciando a quella ineccepibile purezza, che si può conseguire, pur di non oltrepassarli, e ci vale di collocare degnamente la Meccanica a lato della Geometria. L'effettiva riduzione di quei diversi fenomeni al movimento dei corpi ordinarii, forniti cioè di massa, sembra ancora lontana. Certo, colla maggior probabilità, il calore, che, sotto i nostri occhi, nasce dallo spostamento dei corpi, e alla sua volta, lo genera, è spostamento delle loro parti, non altrimenti che il suono. Ma, per richiamarlo, come il suono, nel dominio della Meccanica Razionale, almeno coi sussidi di cui attualmente disponiamo, ci manca l'ipotesi, per cui le equazioni generali forniscano una forma di movimento dei corpi, tale da render ragione dei principali fenomeni termici, come fa il movimento elastico pei fenomeni sonori. D'altronde il movimento dei corpi, per quanta parte risulti avere nella vita dell'Universo, non è per avventura che la manifestazione subordinata a particolari condizioni d'un fatto più generale, che resta più estesamente e profondamente da investigare: e alla massima, non di rado professata, che vi stia inclusa la spiegazione di tutti i fenomeni che l'Esperienza raggruppa sotto il principio della conservazione dell'energia, contribuisce certamente l'alto grado di perfezione della Meccanica, per cui, se una spiegazione è possibile, ad essa ci sembra riserbato fornirla.

Di proposito ho anche limitato a pochi cenni d'occasione le notizie storiche. Non certo perchè non ne riconosca l'importanza; ma, tutt'al contrario, giudicandola tale, da non potersi un tanto argomento introdurre con profitto altrimenti che dedicandogli uno studio particolare. Il lettore, e chiunque si applichi

alla Meccanica Razionale, consulterà perciò col maggior vantaggio l'aureo libro del *Mach.* *

Così, per quanto a citazione di testi, ho creduto puramente d'indicare qualche fonte, di mano in mano, quando l'esposizione più direttamente attinta me ne porgeva l'occasione, e di suggerire a proposito di certi argomenti, alquanto concisamente esposti, come conviene alle proporzioni del libro, alcune esposizioni complete. È ben inteso che la sostanza essendo quella che costituisce gli ordinari trattati di Meccanica Razionale, mi sono valso e giovato dei più noti e migliori.

Questo, in breve, lo spirito e la sostanza del libro, che consegno alla stampa, non senza aver esitato ad uscire dalla cerchia de' miei scolari di Fisica Matematica, coll'intento d'aiutare più largamente — se non ho riguardato con occhio troppo benigno le imperfezioni dell'opera mia — lo studio di questa scienza, così posta fra la Matematica pura e la Fisica da riuscire di pari interesse ad ambedue: a questa come base d'ogni razionale collegamento dei fenomeni: a quella come campo d'applicazioni, fra le più proprie ad attestarne l'insigne efficacia.

Valga a conciliarmi la benevolenza del lettore il buon proposito, ch'ebbe già qualche autorevole incoraggiamento, non ultimo, senza dubbio, dei motivi che m'hanno risoluto, come ho saputo, ad attuarlo.

Messina, 3 Giugno 1894.

GIAN ANTONIO MAGGI.

* Op. cit.

PRELIMINARI.

Oggetto della Meccanica.

§ 1. — Nel linguaggio famigliare si dice che un corpo è in movimento quando, come un veicolo, si trasporta da un luogo ad un altro, o gira, come il volante di una macchina, o si deforma, come la molla d'un dinamometro, circostanze che spesso si riconoscono verificarsi ad un tempo. In ogni caso i punti della figura geometrica rappresentata dal corpo, almeno in parte, cambiano di posto, e noi diciamo che sono in movimento. Reciprocamente, ogniqualvolta i punti di questa figura, tutti o parte, cambiano di posto, o sono in movimento, diciamo che il corpo si muove.

§ 2. — Proprietà che si riconoscono collo stesso fatto del movimento sono che ogni punto in movimento impiega un certo tempo a passare da un posto ad un altro, e che da un posto ad un altro si trasporta in modo continuo; con che intendiamo che, se s'immaginano le projezioni dei due posti sopra una retta *qualsivoglia*, ogni punto del segmento da esse limitato sarà projezione di almeno un posto occupato dal punto mobile in un istante compreso tra quelli ai quali occupa i due posti suddetti.

Queste si dicono le proprietà della " durata „ e della " continuità „ del movimento.

§ 3. — Il movimento di un punto è noto quando si conosce il posto da esso occupato ad ogni istante; il movimento di un corpo, quando è noto il movimento d'ogni suo punto.

La relazione tra il posto occupato da un punto ad un tempo qualsivoglia e questo tempo è ciò che distingue il supposto mo-

vimento del punto: e la relazione medesima per ogni punto di un corpo, ciò che distingue il moto del corpo.

§ 4. — Ora l'esperienza insegna che il movimento di un corpo, fissate certe circostanze, riesce più o meno completamente determinato.

Così, se una palla di ferro è abbandonata a sè stessa, " cade ", e il suo centro descrive sensibilmente la verticale del posto inizialmente occupato, con tal legge che, indicando con s e t le grandezze, relative a certe unità di misura, del segmento descritto in un tempo qualsivoglia e di questo tempo, è $s = \frac{1}{2} g t^2$, dove g rappresenta un coefficiente dipendente, oltre che dalle suddette unità, dal luogo dove si eseguisce l'esperimento.

Invece, se la palla si lancia in direzione obliqua per rispetto alla verticale, il suo centro descrive una curva, che risulta in ogni caso assai prossimamente una parabola; e rappresentando con x, z le grandezze dei segmenti d'orizzontale passante pel posto iniziale giacente nel piano della parabola, e della verticale passante per lo stesso posto, descritti alla fine del tempo t dalla sua projezione ortogonale sull'una e sull'altra retta, è $x = at$, $z = bt + \frac{1}{2} g t^2$, dove g ha il precedente significato, e a, b dipendono dalla intensità e dalla direzione dell'impulso.

Così, fissato il luogo, l'intensità e la direzione dell'impulso, il movimento del centro della palla riesce, fra i supposti limiti d'approssimazione, completamente determinato.

Sarà similmente determinato il movimento d'ogni altro punto: ma meno facile a descriversi esattamente, se, per effetto dello impulso iniziale, la palla gira.

E in altri corpi il fenomeno sarà ancor più complicato: come, per esempio, in una massa d'acqua che si versi da un recipiente, la quale cambierà continuamente di forma.

§ 5. — Apparisce da queste poche considerazioni che il fenomeno del movimento dei corpi dà luogo a due ben distinti studi. L'uno, la " descrizione del movimento "; l'altro, la " deduzione del movimento dalle circostanze capaci di determinarlo, e delle circostanze determinatrici da un movimento supposto ".

Il primo studio forma l'oggetto della " Cinematica „ (κίνημα = movimento), il secondo della " Dinamica „ (δύναμις = forza). Insieme le due scienze costituiscono la " Meccanica „, che si suol definire come la scienza del movimento.

La Cinematica, per l'indole sua, non adopera altre nozioni sperimentali all'infuori della durata del movimento e della sua continuità (§ 2).

La Dinamica invece deve cercare all'esperienza altri fatti; che se non avessero luogo relazioni generali fra il movimento e le circostanze capaci di determinarlo, una dinamica generale non sarebbe possibile.

§ 6. — A complemento di questa definizione del còmpito della Meccanica ci limiteremo qui ad aggiungere ch'esso si ridurrà a determinare dei rapporti tra fenomeni, senza aspirare a rivelarne le cause prime. Così, riconosciuto che il fenomeno del moto dei gravi alla superficie terrestre, della rivoluzione della Luna intorno alla Terra, e dei pianeti intorno al Sole sono tutti conseguenze di stessi fatti fondamentali, in termini abbastanza precisi per poterli dedurre dai fatti medesimi, non si potrà porre la questione del perchè di quei fatti, se non nel senso di scoprire altri fatti più generali dai quali dipendano ad un tempo quelli ed altri fenomeni.

Inoltre, il limitato potere della nostra speculazione ci obbliga a considerare soltanto alcuni lati d'ogni fenomeno per volta; per modo che la Meccanica tratta in sostanza fenomeni ideali, per dedurre dai loro rapporti quelli di quegli aspetti dei fenomeni reali che sono in tal modo più o meno perfettamente rappresentati.

Asse ed angolo.

§ 7. — Direzione e senso costituiscono ciò che chiamiamo " orientazione „.

§ 8. — Una retta avente una determinata orientazione si chiamerà un " asse „.

§ 9. — " Raggio „ chiamiamo una retta terminata ad un punto, che diremo suo " polo „ o " origine „; e il suo senso si intenderà sempre quello che dal polo volge verso gli altri punti.

§ 10. — Per rispetto ad un asse determinato, il senso del movimento d'un punto che si concepisce incontrare successivamente e una volta sola tutti i punti di un circuito chiuso non giacente in un piano parallelo all'asse (ciò che brevemente diciamo il senso d'un giro) può presentare due diverse relazioni che giova distinguere.

A tale scopo, premettiamo che il circuito dal supposto punto e la sua projezione sopra un piano perpendicolare all'asse dalla projezione del punto s'intenderanno percorse per rispetto all'asse in senso concorde; ciò che ci permette di ridurci al caso d'una linea in un piano perpendicolare all'asse.

In questo caso immaginiamo una persona ritta sul piano dalla parte donde è voltato l'asse, la quale percorra la linea insieme col punto. A seconda del senso in cui il punto gira, la persona avrà la figura limitata dalla linea costantemente alla propria sinistra o alla propria destra. E questa circostanza permette di distinguere i due sensi del giro per rispetto a quello dell'asse.

Presentano la prima relazione il senso dai piedi alla testa d'una persona e quello del passaggio per davanti da destra a sinistra: il senso da sud a nord dell'asse terrestre e quello della rotazione diurna: il senso in cui la projezione sull'asse di una vite ordinaria d'un punto che ne percorre il verme descrive l'asse medesimo e quello in cui gira la projezione del punto sopra un piano perpendicolare all'asse.

Presentano invece la seconda relazione il senso dei piedi alla testa e quello del passaggio da sinistra a destra davanti alla persona: il senso da sud a nord dell'asse del mondo e quello della rotazione della sfera celeste: il senso d'un asse sorgente dal quadrante d'un orologio e quello in cui girano gl'indici.

Ordinariamente il senso d'un asse e quello di un giro si dicono, l'uno per rispetto all'altro, positivi nel primo caso e negativi nel secondo.

§ 11. — Giova concepire l'angolo limitato da due raggi uscenti da un polo comune come generato da un raggio avente lo stesso polo, mobile in un piano, o piano dell'angolo, il quale passi da un lato all'altro " origine „ e " termine „ dell'angolo considerato. Immaginato un asse perpendicolare al piano dell'angolo, ogni punto del raggio mobile descriverà un arco di cerchio col centro nel polo in senso corrispondente, a seconda del caso, ad un giro positivo o negativo rispetto all'asse. È così distingueremo, ricorrendo al principio suesposto, i due casi medesimi.

§ 12. — Angolo di due raggi, uscenti da un polo, significherà l'angolo non maggiore di due retti, computato senza distinzione d'origine e di termine.

Distinti i due lati in origine e termine, l'angolo da essi limitato si dirà formato dal secondo col primo. E assegnata all'angolo medesimo misura positiva o negativa secondo il senso del giro del raggio generatore, l'angolo, quando occorre concepire il termine come variabile, si dirà " crescente „ nel senso a cui corrisponde misura positiva.

§ 13. — Angolo di due raggi o di due assi qualunque, e angolo avente due raggi o due assi qualunque rispettivamente per origine e per termine, significherà sempre angolo di due raggi orientati come quelli, distinti, nel secondo caso, in origine e termine, uscenti da un polo comune.

L'angolo avente per origine e per termine due assi o due raggi le misure dei cui segmenti si indicano con r, r' (§ 19) si rappresenterà spesso con $(r\, r')$.

§ 14. — L'unità di misura degli angoli, quando non si dichiari il contrario, sarà l'angolo al centro di un cerchio di raggio qualunque, che comprende un arco di lunghezza eguale al raggio: cioè la misura degli angoli, la così detta " circolare „ o " teorica „.

§ 15. — Un piano terminato ad una retta si dice un " semipiano „.

Un raggio si dirà orientato " secondo „ un semipiano, e " come „ un semipiano, quando un raggio, colla supposta orientazione, e il polo sulla retta terminante il semipiano, giaccia nel semipiano, e, nel secondo caso, sia inoltre perpendicolare alla retta.

Considerazioni analoghe alle precedenti intorno all' angolo di due raggi si debbono fare a proposito dell' angolo diedro limitato da due semipiani terminati ad una stessa retta, la cui misura sarà in ogni caso quella dei raggi orientati come i semipiani origine e termine, distinti egualmente in origine e termine; mentre, quando occorre, il senso della perpendicolare al loro piano sarà quello attribuito allo spigolo dell' angolo diedro per definire l'angolo medesimo — asse dell'angolo diedro.

§ 16. Un piano alla cui perpendicolare si attribuisce un senso determinato si dirà un " piano orientato „ e la perpendicolare in quel senso, l' " asse del piano „.

Immaginato in un piano orientato un asse, il piano, come origine o termine d'un angolo di cui quello sia l' asse, conterà come il semipiano terminato all'asse medesimo, dal quale, col giro d'un angolo retto, positivo rispetto a questo asse, si passa al semipiano orientato come il suo asse.

In un piano orientato, il senso positivo o negativo d'un giro s'intende sempre tale rispetto all'asse del piano.

Determinazione dell'orientazione d'un asse.

§ 17. — Immaginati tre assi ortogonali tra loro, d'orientazione nota, che chiameremo " assi coordinati „, l'orientazione di ogni asse (o raggio) si potrà definire per mezzo dei coseni degli angoli formati da esso con ciascuno dei tre assi coordinati: i così detti " coseni di direzione „ dell'asse rispetto agli assi coordinati.

Indicando con α, β, γ i coseni di direzione d'un asse, questo, per brevità d'espressione, sarà talvolta rappresentato con (α, β, γ). Analogamente $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$ indicherà la semplice direzione dell'asse medesimo, cioè la direzione indipendentemente dal senso.

§ 18. — Giova tener sott'occhio l'espressione dei coseni di direzione di un asse perpendicolare a due assi non paralleli in termini dei coseni di direzione di questi.

Distinguendo i due assi cogli indici 1 e 2, e indicando con λ la grandezza del loro angolo (§§ 12, 13), e con α_1, β_1, γ_1 e α_2, β_2, γ_2

i loro coseni di direzione, mentre α, β, γ indicano i coseni di direzione dell'asse perpendicolare, si avrà:

$$\alpha_1 \alpha + \beta_1 \beta + \gamma_1 \gamma = 0, \quad \alpha_2 \alpha + \beta_2 \beta + \gamma_2 \gamma = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

donde scaturisce:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = \dfrac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{\Delta}, \beta = \dfrac{\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1}{\Delta}, \gamma = \dfrac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\Delta}, \\ \Delta = \pm \sin \lambda. \end{array}\right\} (1)$$

Il doppio segno corrisponde ai due sensi che può avere l'asse (α, β, γ), e distingueremo come positivo e negativo rispetto al giro che, per l'angolo λ, conduce dall'asse 1 all'asse 2 (§ 11).

Per decidere di questo segno, basta considerare i tre assi, concepiti come invariabilmente congiunti, in una posizione particolare; perchè, in ogni altra, si potranno immaginare trasportati da quella con movimento continuo, e il segno non potrà mutare. Perciò, immaginiamo l'asse (α, β, γ) così volto, che rispetto ad esso, il giro conducente per l'angolo λ dall'asse 1 all'asse 2 sia come il giro conducente per l'angolo retto dal primo al secondo asse coordinato rispetto al terzo; e in tale ipotesi coincida con questo asse coordinato, mentre l'asse 1 coincide col primo. Da una parte, sarà $\gamma = 1$: dall'altra, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \sin \lambda$; i quali risultati, per l'ultima delle (1), collimano assumendo $\Delta = \sin \lambda$. Quindi, se conveniamo che il giro conducente per l'angolo retto dal primo al secondo asse coordinato sia positivo rispetto al terzo asse coordinato, si avrà, nell'ipotesi che l'asse (α, β, γ) sia così volto che rispetto ad esso sia positivo il giro conducente per l'angolo λ dall'asse 1 all'asse 2:

$$\alpha = \frac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{\sin \lambda}, \quad \beta = \frac{\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1}{\sin \lambda}, \quad \gamma = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\sin \lambda}, \quad (2$$

dove, rammentiamo, λ s'intende compreso fra 0 e π.

Determinazione della posizione d'un punto.

§ 19. — La posizione d'un punto di un asse si determinerà colla misura del segmento avente per termine il punto medesimo, e un punto fisso dell'asse per origine (origine dei segmenti del-

l'asse), attribuendo alla misura medesima il segno + o il segno −, secondo che il passaggio dall'origine al termine ha il senso dell'asse, oppure il senso opposto. *

§ 20. — Immaginiamo tre assi ortogonali tra loro — assi coordinati — passanti per un punto dato, che si assumerà per origine comune dei segmenti dei tre assi, e si chiamerà perciò " l'origine „ della terna degli assi coordinati in discorso.

La posizione d'ogni punto dello spazio sarà determinata dalle misure dei segmenti dei tre assi aventi per termine la sua projezione (ortogonale) sugli assi medesimi.

È questo il noto metodo cartesiano per la rappresentazione analitica d'un punto. Le misure dei segmenti relativi ad un punto sono le così dette " coordinate cartesiane (ortogonali) „ del punto. Le quali si rappresentano ordinariamente coi simboli x, y, z; conformemente a che il punto si indica talvolta con (x, y, z), e gli assi si distinguono coi nomi d'asse delle x, delle y e delle z, distinto ciascuno, alla sua volta, quando capita, in asse delle x, y o z positive e negative.

Una volta per sempre, converremo che il giro conducente per l'angolo retto dall'asse delle x all'asse delle y sia positivo rispetto all'asse delle z. Così, le (2, § 18) — inteso che i coseni di direzione si riferiscano ad una terna d'assi cartesiani, e corrispondano nell'ordine in cui sono indicati agli assi delle x, y e z rispettivamente — staranno nell'ipotesi che il giro conducente dal l'asse 1 all'asse 2 sia rispetto all'asse (α, β, γ), senz'altro, positivo.

I piani determinati dai tre assi coordinati, presi a due a due, costituiscono i tre piani coordinati yz, zx e xy, così designati coi simboli degli assi contenuti: a ciascuno dei quali si attribuisce come asse (§ 16) l'asse coordinato rimanente.

§ 21. — Siano x, y, z e $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ le coordinate d'un punto per rispetto a due distinte terne d'assi coordinati, corrispondenti in quell'ordine l'una all'altra: e indichino α, β, γ le coordinate dell'origine della seconda terna, e α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ i coseni di direzione di ciascun asse della terna medesima rispetto alla prima, per modo che il coseno dell'angolo, che ciascun asse di

* È inteso, qui e in ogni caso simile, che s'ammette fissata la relativa unità di misura; per modo che la cognizione della misura valga quella della corrispondente quantità (cfr. § 25).

una terna forma con ciascuno dall'altro, sia dato dalla seguente tabella all'intersezione della linea e della colonna segnate coi simboli dei due assi:

	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{z}$
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Si ha:

$$x = \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x} + \alpha_2 \mathfrak{y} + \alpha_3 \mathfrak{z} ;$$
$$y = \beta + \beta_1 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \beta_3 \mathfrak{z} ;$$
$$z = \gamma + \gamma_1 \mathfrak{x} + \gamma_2 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z} ;$$

$$\mathfrak{x} = \alpha_1 (x - \alpha) + \beta_1 (y - \beta) + \gamma_1 (z - \gamma)$$
$$\mathfrak{y} = \alpha_1 (x - \alpha) + \beta_2 (y - \beta) + \gamma_2 (z - \gamma)$$
$$\mathfrak{z} = \alpha_3 (x - \alpha) + \beta_3 (y - \beta) + \gamma_3 (z - \gamma).$$

§ 22. — Le coordinate d'un punto, quando non si dichiari il contrario, s' intenderanno le suddette. Vi sono però altri modi per determinare, dallo stesso punto di vista, la posizione d' un punto, che in certe questioni possono riuscire più opportuni.

Ricorderemo come fra le più largamente adoperate le " coordinate polari „ o " sferiche „ o " geografiche „, colle quali la posizione del punto è definita mediante la distanza del punto medesimo da un punto fisso " polo „, detta " raggio vettore „: l'angolo avente per origine un asse fisso passante pel polo " asse polare „, e per termine il raggio uscente dal polo passante pel punto, detto " colatitudine del punto „: l' angolo infine, avente per origine un semipiano fisso terminato all'asse polare " primo meridiano „ e per termine un semipiano simile passante pel punto, detto la " longitudine del punto „.

Le relative misure (§ 19) si indicheranno coi simboli r, θ, φ, e si distingueranno, occorrendo, cogli stessi nomi. Manifestamente si ottengono tutti i punti dello spazio con r compreso fra 0 e ∞, θ fra 0 e π, φ fra 0 e 2π.

Il senso in cui cresce la longitudine si assumerà positivo rispetto al senso dell'asse polare. Conformemente a ciò, supponendo che il polo coincida coll'origine d'una terna d'assi cartesiani, l'asse polare coll'asse delle z, e il primo meridiano col semipiano terminato all'asse delle z orientato come l'asse delle x positive, si avrà:

$$x = r \cos\varphi \sin\theta, \quad y = r \sin\varphi \sin\theta, \quad z = r \cos\theta. \qquad (1)$$

Sistema di punti e corpo.

§ 23. — Un gruppo di punti assoggettati, se occorre, a certi vincoli (i vertici d'un poliedro, i fochi d'un ellissoide, i centri di più sfere) si chiamerà un " sistema di punti ". Un sistema continuo a tre dimensioni si dirà più specialmente un " corpo ".

La cognizione della posizione di tutti i punti d'un sistema è sufficiente, ma non sempre necessaria, per determinare la posizione del sistema. Grazie ai vincoli è sufficiente in molti casi quello d'un certo numero di parametri: ciò che si esprime dicendo che il sistema possiede altrettanti " gradi di libertà ".

Determinazione della posizione d'un sistema rigido.

§ 24. — Se un sistema è " rigido ", cioè invariabile la mutua distanza dei punti che lo compongono, si potrà fissare una terna d'assi ortogonali, variabile colla posizione del sistema, rispetto alla quale la posizione d'ogni punto del sistema è invariabile: la qual terna si dirà alla sua volta invariabilmente unita col sistema. È chiaro che la posizione del sistema sarà determinata da quella di questa terna. Quindi, se la chiamiamo la terna degli assi $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ (§ 21), e assumiamo una terna d'assi cartesiani orto-

gonali, x, y, z, indipendenti dal sistema, la posizione del sistema stesso sarà determinata dalle coordinate α, β, γ dell'origine della prima terna, e dai coseni di direzione α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ dei suoi assi rispetto alla seconda.

Ora, fra i nove coseni α_i, β_i, γ_i, $(i = 1, 2, 3)$ hanno luogo sei relazioni indipendenti; cioè:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0,$$

e quelle che se ne ricavano permutando circolarmente 1, 2, 3; oppure:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0,$$

e quelle che se ne ricavano permutando circolarmente α, β, γ. E per conseguenza i nove coseni dipendono da tre parametri indipendenti.

Notiamo che per queste relazioni e conformemente alle (2, § 18) si ha:

$$\alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2, \quad \beta_1 = \gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2, \quad \gamma_1 = \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2,$$

e le analoghe, che si ricavano da ciascuna permutando circolarmente 1, 2, 3.

Ciò premesso, conformemente a

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

poniamo:

$$\alpha_3 = \cos\varphi \sin\theta, \quad \beta_3 = \sin\varphi \sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta:$$

e conformemente a

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

analogamente:

$$\gamma_1 = \cos f \sin\theta, \quad \gamma_2 = \sin f \sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta.$$

Così φ, θ e f risultano determinati, salvo l'aggiunta di un multiplo di 2π. Inoltre si potrà cambiare θ in $-\theta$, pur di cambiare φ in $\varphi + \pi$ e f in $f + \pi$. Ma, fatta la scelta per una posizione del sistema, sarà pienamente determinato il valore succedente per continuità in ogni altra posizione.

Saranno così espressi cinque dei nove coseni in termini dei tre parametri indipendenti φ, θ e f.

Per quanto ai rimanenti, da:

$$\alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2, \quad \beta_2 = \gamma_3 \alpha_1 - \gamma_1 \alpha_3$$

segue:

$$\alpha_1 \gamma_3 = \beta_2 \gamma_3^2 - \beta_3 \gamma_2 \gamma_3, \quad \beta_2 \gamma_3 = \gamma_3^2 \alpha_1 - \gamma_1 \gamma_3 \alpha_3,$$

$$\alpha_1 = \frac{-\beta_3 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_3 \alpha_3}{1 - \gamma_3^2} = -\sin\varphi \sin f - \cos\varphi \cos f \cos\theta$$

$$\beta_2 = \frac{-\gamma_1 \alpha_3 - \beta_3 \gamma_2 \gamma_3}{1 - \gamma_3^2} = -\cos\varphi \cos f - \sin\varphi \sin f \cos\theta.$$

E analogamente, da

$$\alpha_2 = \beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3, \quad \beta_1 = \gamma_2 \alpha_3 - \gamma_3 \alpha_2$$

si ricaverà:

$$\alpha_2 = \sin\varphi \cos f - \cos\varphi \sin f \cos\theta$$
$$\beta_1 = \cos\varphi \sin f - \sin\varphi \cos f \cos\theta.$$

Per le (1, § 22) si riconosce immediatamente che θ si può intendere misuri l'angolo dei due assi z e $\mathfrak{z}$: φ l'angolo, che il semipiano terminato all'asse delle z contenente l'asse delle $\mathfrak{z}$ positive forma col piano $y\,z$, crescente nel senso positivo rispetto all'asse delle z: f l'angolo analogo, che il semipiano terminato all'asse delle $\mathfrak{z}$ contenente l'asse delle z positive forma col piano $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$, crescente nel senso positivo rispetto all'asse delle $\mathfrak{z}$.

Quindi θ e φ servono a fissare l'orientazione dell'asse delle $\mathfrak{z}$: dopo di che f fissa quella della coppia $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$.

Quantità.

§ 25. — La lunghezza d'un segmento, l'ampiezza d'un angolo sono esempi di " quantità „.

In generale una quantità si determina mediante l' " unità di misura „, che è una quantità della specie considerata scelta a piacere, e la " misura „, che è un numero.

Questo numero, salvo le debite restrizioni nei singoli casi, può essere qualsivoglia. Così, la lunghezza di un segmento e l'ampiezza d'un angolo possono avere misura positiva e negativa, mediante la convenzione che si distinguano l' " origine „

e il " termine ", e lo scambio di essi tragga l' inversione del segno; mentre la misura zero si attribuisce ad un punto, fra i segmenti, e ad un raggio fra gli angoli: cioè al caso che coincidano i due estremi. Analogamente un debito si computa come un credito di misura negativa, e la spinta d'un areostata come un peso di misura negativa d'egual valore assoluto.

Per brevità di discorso diremo spesso " grandezza della quantità " il valore assoluto della sua misura: che se m rappresenta la misura, sarà rappresentata col simbolo $|m|$.

§ 26. — Indicando la misura d'una quantità con m, e con $[m]$ l'unità corrispondente, la quantità si suol rappresentare con

$$m\,[m];$$

combinazione che ha del prodotto di due fattori la proprietà associativa:

$$m\,[m'\,[m]\,] = m\,m'\,[m],$$

e la proprietà distributiva:

$$(m_1 + m_2)\,[m] = m_1\,[m] + m_2\,[m],$$

(della quale e della precedente è conseguenza:

$$m\,[\,[m_1] + [m_2]\,] = m\,[m_1] + m\,[m_2]\,);$$

dove il segno + posto tra i simboli di due quantità indica la operazione di " riunione ", che produce la quantità la cui misura, a parità d' unità, è la somma delle misure delle quantità considerate.

§ 27. — Siano date delle quantità di diversa specie, e $p, q, r, \ldots$ ne siano la misura per rispetto alle unità corrispondenti $[p]$, $[q]$, $[r], \ldots$ Il prodotto:

$$p^\alpha\, q^\beta\, r^\gamma \ldots, \tag{1}$$

ove α, β, $\gamma \ldots$ sono certi numeri, ha un valore determinato per ogni valore di $p, q, r, \ldots$ e cioè date le quantità, e scelta l'unità di misura per ciascuna.

Converremo di chiamare questo numero la misura d' una " quantità derivata "; la quale s'intenderà definita dalle quantità date, in relazione colla formola (1): l' " unità " corrispondente avendosi ogniqualvolta il prodotto medesimo riceve il valore 1.

Questa unità sarà dunque puramente determinata dalle unità di misura e dagli esponenti $\alpha, \beta, \gamma \dots$ La diremo un' " unità derivata „ dalle $[p]$, $[q]$, $[r]$,... che ha per rispetto a $[p]$, $[q]$, $[r]$,... le " dimensioni „ $\alpha, \beta, \gamma \dots$ e la rappresenteremo con

$$[p^\alpha \, q^\beta \, r^\gamma \dots]. \tag{2}$$

Cambiando le unità, il nuovo valore di (1) s' intenderà la misura della stessa quantità rispetto alla unità relativa alle nuove unità, e con esse rappresentata da (2).

Così, adottando la consueta espressione in forma di prodotto (§ 26), ha luogo la proprietà:

$$m\,[\,(a\,p)^\alpha\,(b\,q)^\beta\,(c\,r)^\gamma \dots] = m\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma \dots [p^\alpha\,q^\beta\,r^\gamma \dots]$$

Stabiliremo poi che il risultato della riunione di due quantità derivate della stessa specie, cioè riferibili alla stessa unità, sia la quantità la cui misura, a parità d' unità, è la somma delle misure delle quantità considerate.

§ 28. — Di varie specie di quantità derivate è facile trovare una definizione intrinseca. Per esempio, se $[p]$, $[v]$ indicano le unità di peso e di volume, e p, v la misura del peso e del volume d'un corpo tale che il peso d' ogni parte è proporzionale al volume, $\frac{p}{v}$ ossia $p\,v^{-1}$ sarà, per rispetto alle supposte unità, la misura del peso dell' unità di volume del corpo considerato; e per conseguenza $[p\,v^{-1}]$ corrisponde, secondo le precedenti definizioni, al peso dell'unità di volume o peso specifico.

Altre volte una definizione intrinseca d' una quantità derivata risulta da certe relazioni fra quantità di diversa specie. Così, dalle proposizioni geometriche che le aree di due rettangoli e i volumi di due parallelepipedi rettangoli sono proporzionali ai prodotti delle lunghezze dei lati concorrenti in un vertice, si deduce che, assunta l' area del quadrato e il volume del cubo avente per lato l'unità di lunghezza $[l]$ come unità di area e di volume rispettivamente, le unità derivate $[l^2]$ e $[l^3]$ convengono rispettivamente all'area e al volume.

Vettore.

§ 29. — Quantità e orientazione insieme costituiscono ciò che si chiama un " vettore „ o " quantità diretta „: la prima, e la sua misura, detta la " quantità „ e " la misura del vettore „, e la seconda, l' " orientazione del vettore „.

La misura potrà, se capita, essere presa col segno + o —. In tal caso si converrà di chiamare " orientazione relativa al vettore „, rispettivamente quella del vettore o l'opposta. E perciò giova associare al vettore un asse, avente questa orientazione, che chiameremo " asse del vettore „.

Il più semplice esempio di vettore è un segmento rettilineo avente una determinata orientazione, che diremo talvolta " segmento orientato „. Un altro esempio è un angolo in un piano orientato: inteso che l'orientazione del vettore sia quella dell'asse del piano (§ 16), o l'opposta, secondo che il giro conducente per l'angolo dall'origine al termine è, rispetto a detto asse, positivo o negativo, mentre, negli stessi casi, la misura è positiva o negativa. Con ciò l'asse del piano è anche l'asse del vettore.

Qualunque sia il vettore, pur di scegliere convenientemente l'unità di misura, vi sarà un segmento orientato avente la sua orientazione e la sua misura. Lo chiameremo il segmento rappresentativo del vettore, o anche il " segmento del vettore „ senz'altro.* E quando un'operazione geometrica si dirà, per brevità di discorso, eseguita sopra un vettore, s'intenderà che lo sia sopra il relativo segmento.

Quando la misura sia nulla, l'orientazione s'intenderà indeterminata, e il segmento ridotto ad un punto (§ 25).

§ 30. — Due vettori si diranno della stessa specie quando sono delle stesse specie le relative quantità.

* Di qui trae origine il nome di *vector*, posto da *Hamilton*, poichè l'orientazione di un segmento si può definire concependolo come veicolo di un punto mobile, che passa da un punto ad un altro dello spazio.

§ 31. — " Componente d' un vettore secondo un asse „ si chiama il vettore della stessa specie di cui quello è l'asse, e la misura il prodotto della misura del vettore pel coseno dell'angolo che il suo asse forma coll'asse considerato: o, in altre parole, il vettore il cui segmento è la projezione del segmento del vettore dato sull'asse dato, al quale venga inoltre attribuito come asse, conformemente alla premessa definizione (§ 29), l'asse in discorso, cui il componente considerato si riferisce.

La misura del componente si chiamerà spesso, per brevità di discorso, " la componente „ secondo l'asse supposto.

§ 32. — " I componenti di un vettore secondo tre assi non paralleli ad un piano determinano il vettore. „ Difatti, descritti per un punto come comune origine i segmenti rappresentativi dei componenti dati, il segmento di cui quella è l'origine, e il termine la comune intersezione dei piani perpendicolari ai tre segmenti, condotti pei loro termini, sarà il segmento rappresentativo del vettore in discorso.

Notiamo che nel caso che i tre vettori siano a due a due ortogonali, lo stesso segmento può anche definirsi come quello che ha origine e termine comuni con una spezzata i cui lati sono segmenti rappresentativi dei singoli vettori.

§ 33. — In particolare, un vettore è determinato dai suoi componenti secondo tre assi cartesiani ortogonali. Questi si chiameranno ordinariamente i componenti del vettore senz'altra aggiunta, e le loro misure, le componenti (§ 31).

Siano X, Y, Z le componenti di un vettore secondo tre assi cartesiani ortogonali, e $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ * indichi il valor assoluto del radicale.

La grandezza del vettore sarà $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$: la sua misura, $\pm\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$: e i coseni di direzione dell'asse:

$$\pm\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \pm\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

* Similmente, in tutto il seguito, il segno $\sqrt{}$, senz'altra indicazione, rappresenterà, salvo dichiarare il contrario, il valor assoluto.

in tutte le quali formole va preso contemporaneamente il segno superiore o inferiore.

I coseni di direzione del vettore stesso saranno poi in ogni caso:

$$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

poichè, o la misura è positiva, e l'orientazione è quella dell'asse, o è negativa, e l'orientazione è l'opposta.

Il vettore le cui componenti secondo gli assunti assi cartesiani sono X, Y, Z s'indicherà ordinariamente con (X, Y, Z).

§ 34. — "Risultante di un numero qualunque di vettori d'una certa specie „ si chiama il vettore della stessa specie rappresentato dal segmento orientato avente origine e termine comuni con una spezzata i cui lati sono segmenti rappresentativi dei vettori suddetti, presi in un ordine qualsivoglia (che agevolmente si riconosce essere indifferente), in modo che il termine dell'uno formi l'origine del successivo.

Il risultante di più vettori si dirà talvolta " composto „ dai vettori medesimi, e questi si chiameranno "componenti „. Si vede che, se i componenti sono tra loro ortogonali, ciascuno è il componente del vettore secondo il proprio asse (§ 31, cfr. § 32).

§ 35. — Segue dalla stessa definizione che il componente del risultante di più vettori secondo un certo asse avrà per misura la somma delle misure dei componenti secondo lo stesso asse dei singoli componenti.

In particolare, se X, Y, Z sono le componenti di un vettore secondo tre assi cartesiani ortogonali, la misura del suo componente, o la sua componente, secondo un asse i cui coseni di direzione sono α, β, γ sarà:

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma.$$

E se il vettore (X, Y, Z) è risultante di più altri, e X_i, Y_i, Z_i sono le componenti d'uno qualunque di essi secondo i tre assi sarà:

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i,$$

ove la sommatoria s'intende abbracciare tutti i vettori, e reci-

procamente. Formole che si possono assumere per definizione della mutua relazione fra i vettori componenti (X_i, Y_i, Z_i) e il loro risultante (X, Y, Z).

§ 36. — Giova qualche volta considerare anche il " componente d'un vettore secondo un piano „; ciò che significa il vettore della stessa specie il cui segmento è la projezione sul piano del vettore considerato, l'asse essendo preso col senso che è la projezione di quello attribuito all'asse del vettore sul piano medesimo, per modo che uno stesso segno apparterrà sempre alla misura del vettore, e a quella del componente in discorso, detta la sua " componente secondo il piano „.

In particolare, le componenti del vettore (X, Y, Z) secondo i piani coordinati yz, zx, xy saranno:

$$\pm\sqrt{Y^2+Z^2}, \quad \pm\sqrt{Z^2+X^2}, \quad \pm\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Vettore applicato o localizzato.

§ 37. — Un vettore ed un punto costituiscono ciò che chiamiamo " vettore applicato „ o " localizzato „. Il punto si chiamerà " punto d'applicazione „, e l'asse avente l'orientazione relativa al vettore (§ 29), passante per questo punto, " asse d'applicazione „.

Il segmento rappresentativo del vettore (§ 29) avente per origine il punto d'applicazione si dirà il " segmento rappresentativo del vettore applicato „, o anche semplicemente il " segmento del vettore applicato „.

Momento di un vettore applicato rispetto ad un punto.

§ 38. — " Momento di un vettore applicato rispetto ad un punto „, nell'ipotesi che questo punto non appartenga all'asse d'applicazione, chiamiamo il vettore il cui asse è perpendicolare al piano dell'asse d'applicazione e del punto, col senso positivo rispetto al giro conducente per l'angolo retto dalla perpendico-

lare descritta dal punto sull'asse all'asse medesimo; e la misura è il prodotto della misura del vettore per la grandezza di detta perpendicolare. Quando il punto appartenga all'asse d'applicazione, al momento si attribuirà il valor zero.

Il punto rispetto al quale il momento è definito, si distinguerà talvolta col nome di " polo ".

Così, se $[l]$ e $[V]$ indicano le unità di misura di lunghezza e del vettore considerato, quella del momento si potrà rappresentare con $[l\,V]$ (§ 27).

§ 39. — Dalla stessa definizione scaturisce che il momento d'un vettore applicato rispetto ad un polo è lo stesso, a parità di polo, per tutti i vettori applicati che hanno comune l'asse di applicazione, e, a parità di vettore, per tutti i poli che appartengono ad una retta parallela all'asse.

§ 40. — Inoltre, immaginando assunta una terna d'assi cartesiani ortogonali, si ha subito (cfr. § 18) che, se indicano X, Y, Z e x, y, z le componenti del vettore e le coordinate del punto d'applicazione, che costituiscono un vettore applicato, a, b, c le coordinate del polo, e M_x, M_y, M_z le componenti del momento del vettore applicato rispetto a questo polo, sarà:

$$
\begin{aligned}
M_x &= (y - b)\, Z - (z - c)\, Y,\\
M_y &= (z - c)\, X - (x - a)\, Z,\\
M_z &= (x - a)\, Y - (y - b)\, X.
\end{aligned}
$$

§ 41. — Si consideri un secondo punto (a', b', c'). Le componenti del momento del suddetto vettore applicato rispetto a questo punto come polo si potranno, per le precedenti formole, rappresentare con

$$
\begin{aligned}
&M_x + (b - b')\, Z - (c - c')\, Y,\\
&M_y + (c - c')\, X - (a - a')\, Z,\\
&M_z + (a - a')\, Y - (b - b')\, X.
\end{aligned}
$$

Quindi: " Il momento di un vettore applicato rispetto ad un polo è composto del momento analogo per rispetto ad un altro polo qualsivoglia e del momento del vettore applicato il cui vettore è lo stesso e il punto d'applicazione questo secondo punto, rispetto al primo polo. "

§ 42. – Dato un vettore, M, e un punto P, non si potrà considerare M come momento rispetto a P di un vettore applicato di cui il vettore, V, si supponga prefissato, se i due vettori non sono fra loro perpendicolari. Questa circostanza necessaria è anche sufficiente: ammessa almeno fra le unità di misura l'indicata relazione (§ 38). Supposto che si verifichi, M sarà in tal caso il momento rispetto a P del vettore applicato di cui V è il vettore, e l'asse d'applicazione passa pel punto del piano contenente P perpendicolare a M, posto sulla perpendicolare a V, a distanza da P misurata dal rapporto della grandezza di M a quella di V, da tal parte che sia positivo rispetto all'asse di M il giro conducente per l'angolo retto dalla perpendicolare sull'asse di V spiccata da P all'asse medesimo (§ 38).

§ 43. — Si chiama talvolta " momento d'un vettore applicato rispetto ad una retta „, non posta in uno stesso piano coll'asse d'applicazione, il vettore il cui asse ha la direzione della retta, col senso positivo rispetto al giro che conduce per l'angolo minore di due retti dal raggio spiccato dalla retta coll'orientazione della minima distanza fra essa e l'asse d'applicazione all'asse del componente del vettore secondo un piano perpendicolare alla retta (§ 36), e per misura il prodotto di questa componente per la grandezza della minima distanza suddetta. Quando la retta e l'asse d'applicazione giacciano in uno stesso piano si attribuirà al momento del vettore rispetto alla retta il valor zero.

Ora, si ha:

$$(y-b)\,Z-(z-c)\,Y=\sqrt{Y^2+Z^2}\,\sqrt{(y-b)^2+(z-c)^2}\,\sin(\varphi-\chi),$$

dove φ, χ indicano la misura degli angoli aventi per origine l'asse delle y e per termine il segmento rappresentativo del componente del vettore (X, Y, Z) secondo il piano $y\,z$, e il raggio descritto dalla projezione del polo (a, b, c) sul piano $y\,z$ alla projezione del punto d'applicazione (x, y, z). E per conseguenza, come è agevole rilevare, il componente secondo un asse del momento d'un vettore applicato rispetto ad un polo è il momento dello stesso vettore applicato rispetto alla retta passante pel polo, avente la direzione dell'asse.

Ne viene che il componente in discorso non cambia spostando il polo sopra una retta parallela al suo asse; ciò che d'altronde emerge senz'altro dalle formole precedenti.

Risultante di un sistema di vettori applicati e dei loro momenti rispetto ad un polo.

§ 44. — " Risultante d'un numero qualunque di vettori applicati " si chiama il risultante dei corrispondenti vettori.

Quindi, se (X_i, Y_i, Z_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ sono n vettori, posto:

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i,$$

ove la sommatoria s'intende estesa a tutti i vettori, il vettore (X, Y, Z) sarà indifferentemente il risultante degli n vettori (X_i, Y_i, Z_i) secondo il § 34, e il risultante degli n vettori applicati definiti dai vettori medesimi e dagli n punti d'applicazione corrispondenti (x_i, y_i, z_i).

§ 45. — Posto poi:

$$\begin{aligned} M_x &= \Sigma \{ (y_i - b)\, Z_i - (z_i - c)\, Y_i \}, \\ M_y &= \Sigma \{ (z_i - c)\, X_i - (x_i - a)\, Z_i \}, \\ M_z &= \Sigma \{ (x_i - a)\, Y_i - (y_i - b)\, X_i \}, \end{aligned}$$

sarà (M_x, M_y, M_z) il risultante dei momenti degli n vettori applicati suddetti rispetto al polo (a, b, c) (§§ 35, 40).

§ 46. — Indicando con (a', b', c') un altro punto, e con M'_x, M'_y, M'_z le componenti del risultante dei momenti rispetto ad esso, si trova immediatamente (cfr. § 41):

$$\begin{aligned} M'_x &= M_x + (b - b')\, Z - (c - c')\, Y, \\ M'_y &= M_y + (c - c')\, X - (a - a')\, Z, \\ M'_z &= M_z + (a - a')\, Y - (b - b')\, X, \end{aligned} \qquad (1)$$

esprimenti che il risultante dei momenti rispetto al polo (a', b', c') è composto del risultante dei momenti rispetto ad (a, b, c) e del momento rispetto ad (a', b', c') del vettore applicato di cui il risultante dei vettori (X, Y, Z) è il vettore, e l'antico polo (a, b, c) punto d'applicazione.

§ 47. — Di qui segue immediatamente che il risultante dei momenti rispetto ad un polo è lo stesso per tutti i poli che

appartengono ad una stessa parallela al risultante dei vettori, e in generale diverso per poli appartenenti a parallele diverse. Chiameremo ognuna di queste parallele un " asse „ del sistema dei vettori applicati.

§ 48. — Indichino R, M ed M′ le misure del risultante dei vettori e dei momenti rispetto a due punti (a, b, c) e (a', b', c') corrispondenti a due distinti assi: cos (R M) e cos (R M′) i coseni degli angoli formati dagli assi dei momenti medesimi coll'asse del risultante dei vettori.

Se $R = 0$, cioè $X = Y = Z = 0$, il risultante dei momenti, per le (1, § 44), sarà completamente invariabile.

Invece se R, cioè una almeno delle X, Y, Z, è diversa da zero, ad ogni distinto asse competerà un risultante diverso.

Facciamo d'ora in avanti, salvo avvertire il contrario, questa ipotesi. Le (1, § 44) forniscono:

$$M_x X + M_y Y + M_z Z = M'_x X + M'_y Y + M'_z Z. \qquad (1)$$

E di qui, supposti M ed M′ diversi da zero:

$$M \cos (R\, M) = M' \cos (R'\, M'), \qquad (2)$$

esprimente che " la componente del risultante dei momenti rispetto ad un polo secondo l'asse del risultante dei vettori è indipendente dal polo „.

§ 49. — Supponiamo che per un asse il risultante dei momenti in discorso sia nullo: che se è possibile, segue però dal § 46 che la stessa proprietà non potrà appartenere ad alcun altro. Perciò è necessario e sufficiente che le coordinate x, y, z del punto qualunque dell'asse in discorso soddisfacciano le equazioni:

$$\begin{aligned} M_x + (b - y)\, Z - (c - z)\, Y &= 0, \\ M_y + (c - z)\, X - (a - x)\, Z &= 0, \\ M_z + (a - x)\, Y - (b - y)\, X &= 0; \end{aligned} \qquad (1)$$

cioè che si verifichi la condizione:

$$M_x X + M_y Y + M_z Z = 0,$$

ossia che il risultante dei vettori e dei momenti rispetto ad un polo qualsivoglia, preso fuori del supposto asse, siano fra loro ortogonali. La qual condizione, per (1, § 48), se si verifica per un punto, si verifica per tutti.

In tal caso, una delle tre equazioni riesce immediatamente conseguenza delle rimanenti due, che sono le equazioni dell'asse cui compete il momento nullo.

Ora, queste equazioni si possono porre sotto la forma equivalente:

$$M_x = (y-b)\,Z - (z-c)\,Y\,,$$
$$M_y = (z-c)\,X - (x-a)\,Z\,,$$
$$M_z = (x-a)\,Y - (y-b)\,X\,.$$

Per conseguenza, " quando ad un asse corrisponde il valor zero del risultante dei momenti, questo è, per ogni posizione del polo, il momento rispetto a questo polo del vettore applicato il cui vettore è il risultante dei vettori, e l'asse di applicazione l'asse in discorso ". Donde segue che i due risultanti saranno fra loro perpendicolari. E reciprocamente, " quando i risultanti dei vettori e dei momenti rispetto ad un polo sono fra loro perpendicolari, condizione che, se si verifica per un polo, ha luogo costantemente, il risultante dei momenti è il momento rispetto al supposto polo d'un vettore applicato il cui vettore è il risultante dei vettori, per modo che al suo asse d'applicazione corrisponde il valor zero del risultante dei momenti " (§ 42).

§ 50. — Si supponga ora che per nessun asse il risultante dei momenti sia nullo: cioè le (1 § 49) non soddisfatte da alcuna terna di valori x, y, z. Possiamo in tal caso determinare mediante:

$$\frac{M_x + (b-y)\,Z - (c-z)Y}{X} = \frac{M_y + (c-z)\,X - (a-x)Z}{Y} = \frac{M_z + (a-x)Y - (b-y)X}{Z}\,,$$

l'asse a cui compete momento parallelo al risultante dei vettori.

È facile porre queste equazioni sotto la forma più semplice, atta a mettere in evidenza come definiscano realmente un asse del sistema. Perciò, notiamo che l'ultima può scriversi:

$$(Y^2 + Z^2)\,(x-a) - \big((y-b)\,Y + (z-c)\,Z\big)X = Y\,M_z - Z\,M_y\,,$$

la quale, aggiungendo e sottraendo nel primo membro $X^2\,(x-a)$, si trasforma nella prima delle tre:

$$R\,(x-a) - \varpi\,X = R\,\xi\,, \qquad R\,(y-b) - \varpi\,Y = R\,\eta\,, \qquad R\,(z-c) - \varpi\,Z = R\,\zeta\,,$$

dove:

$$Y M_z - Z M_y = R^2 \xi, \qquad Z M_x - X M_z = R^2 \eta, \qquad X M_y - Y M_x = R^2 \zeta,$$

$$(x-a) X + (y-b) Y + (z-c) Z = R \varpi .$$

E di qui:

$$\frac{x-a-\xi}{X} = \frac{y-b-\eta}{Y} = \frac{z-c-\zeta}{Z} .$$

Per (2, § 48), indicando con M_0 la misura del risultante dei momenti corrispondente all'asse così definito:

$$M \cos (R\, M) = M_0 ;$$

donde scaturisce che all'asse in discorso corrisponde il risultante dei momenti di grandezza minima.

Questo asse si chiama l'" asse centrale ": termine che si estende nel relativo caso all'asse cui corrisponde il risultante nullo (§ 49). In entrambi i casi, valendosi della relazione del § 46, si trova immediatamente:

$$M^2 = M_0^2 + r^2 R^2, \qquad \tan (R\, M) = \frac{R r}{M_0} ,$$

dove r indica la grandezza della distanza dell'asse cui si riferisce M dall'asse centrale: per modo che la grandezza del risultante dei momenti è la stessa per tutti gli assi equidistanti dall'asse centrale medesimo.

§ 51. — Siano gli n vettori applicati tali che i loro assi d'applicazione convergano verso un punto. Assumendo questo punto per polo del momento d'ogni vettore applicato, questo risulterà zero, e perciò $M_x = M_y = M_z = 0$. Esiste quindi nel caso in discorso l'asse d'applicazione del risultante dei vettori, che sarà l'asse avente l'orientazione relativa al risultante dei vettori, passante pel punto di convergenza.

§ 52. — Di qui si può presumere che esisterà l'asse d'applicazione del risultante di un sistema di vettori applicati fra loro paralleli.

Sia in tal caso:

$$X_i = R_i\, \alpha, \quad Y_i = R_i\, \beta, \quad Z_i = R_i\, \gamma ,$$

dove α, β, γ sono i coseni di direzione dell'asse comune a tutti i vettori.

Ne viene:

$$X = \alpha \Sigma R_i, \quad Y = \beta \Sigma R_i, \quad Z = \gamma \Sigma R_i,$$
$$M_x = \beta (\Sigma z_i R_i - c \Sigma R_i) - \gamma (\Sigma y_i R_i - b \Sigma R_i),$$
$$M_y = \gamma (\Sigma x_i R_i - a \Sigma R_i) - \alpha (\Sigma z_i R_i - c \Sigma R_i),$$
$$M_z = \alpha (\Sigma y_i R_i - b \Sigma R_i) - \beta (\Sigma x_i R_i - a \Sigma R_i).$$

E perciò, supposto ΣR_i diverso da zero, sarà:

$$M_x = M_y = M_z = 0$$

pel punto definito da:

$$a = \frac{\Sigma x_i R_i}{\Sigma R_i}, \quad b = \frac{\Sigma y_i R_i}{\Sigma R_i}, \quad c = \frac{\Sigma z_i R_i}{\Sigma R_i},$$

e per ogni altro della retta passante per esso avente la direzione comune dei vettori, la quale, coll'orientazione dell'asse dei vettori medesimi, sarà l'asse d'applicazione del risultante degli n vettori applicati.

Il punto, ch'è da notarsi come sia indipendente dalla orientazione dei vettori, si chiama il “centro dei vettori paralleli„, e talvolta il “punto d'applicazione„ del loro risultante.

Coppia.

§ 53. — Il risultante dei momenti rispetto ad un polo di due vettori applicati definiti dai vettori (X, Y, Z) e $(-X, -Y, -Z)$, d'egual grandezza e opposta orientazione e dai punti (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) avrà per componenti:

$$(y_1 - y_2) Z - (z_1 - z_2) Y,$$
$$(z_1 - z_2) X - (x_1 - x_2) Z,$$
$$(x_1 - x_2) Y - (y_1 - y_2) X,$$

e coinciderà col momento del vettore applicato definito dal primo vettore e dal primo punto rispetto al secondo punto come polo.

Quindi, reciprocamente, il momento di un vettore applicato rispetto ad un polo si potrà sempre concepire, se piace, come risultante dei momenti rispetto ad un polo qualsivoglia d'una coppia di vettori d'egual grandezza e opposta orientazione, asse-

gnando il polo del dato momento come punto d'applicazione al vettore eguale ed opposto a quello del momento dato.

E di qui nasce il concetto di " coppia „; così chiamandosi l'insieme di due vettori applicati d'egual grandezza e opposta orientazione, atti a definire nel modo suddetto il momento d'un vettore applicato rispetto ad un polo, il quale perciò si chiama anche " momento della coppia „; mentre due coppie s'intendono eguali sotto la condizione necessaria e sufficiente che siano eguali i loro momenti.

Terna vettoriale.

§ 54. — Chiameremo " terna vettoriale „ l'insieme di tre direzioni fra loro ortogonali e di tre quantità a ciascuna di esse corrispondenti, non tutte nulle.

Questo insieme definisce una quadrica centrata, reale o immaginaria, di cui il centro è un punto qualsivoglia, gli assi hanno le supposte direzioni, e le misure delle tre quantità sono gli inversi dei quadrati dei corrispondenti semiassi.* La chiameremo la " quadrica „ della terna vettoriale; e " quadrica della terna invertita „ diremo quella della terna che si deduce dalla data invertendo il segno delle misure delle tre quantità. Così, in ogni caso, almeno una delle due quadriche sarà reale.

Reciprocamente, una quadrica centrata definirà colle direzioni de' suoi assi, e gli inversi dei quadrati dei semiassi corrispondenti, una terna vettoriale, di cui sarà, secondo la premessa definizione, la quadrica. La qual terna sarà unica, se la quadrica non è di rotazione; mentre, in questo caso, la quadrica converrà egualmente a tutte le terne che si ricavano da una qualunque con un giro intorno all'asse di rotazione, e se è una sfera, a tutte le terne per le quali la misura delle tre quantità è l'inverso del quadrato del raggio.

* Comprendiamo sotto lo stesso termine le note degenerazioni che corrisponderanno all'ipotesi che una o due quantità siano nulle, e concepiamo come casi limiti col tendere delle stesse quantità a zero.

S'intende che si suppone una certa specie di quantità, e una certa unità di misura.

Assunto un sistema d'assi cartesiani ortogonali coll'origine nel centro della quadrica d'una terna vettoriale, questa sarà determinata col metodo cartesiano dall'equazione:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy = 1, \qquad (1)$$

e reciprocamente determinerà i coefficienti:

$$a, \quad b, \quad c, \quad l, \quad m, \quad n.$$

Perciò, supposti certi assi coordinati, la cognizione di questi coefficienti equivale a quella della terna vettoriale; e noi li chiameremo i " parametri dalla terna vettoriale " relativi (se occorre indicarlo) ai supposti assi coordinati.

§ 55. — Le relazioni esistenti tra questi parametri e gli elementi che direttamente definiscono la terna vettoriale, cioè i coseni di direzione delle tre direzioni, e le misure delle tre quantità, sono quelle che insegna la ben nota teoria delle quadriche.

Posto:

$$x = \rho\alpha, \qquad y = \rho\beta, \qquad z = \rho\gamma,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad (1)$$

e inteso che x, y, z soddisfacciano alla (1) del precedente §, per modo che:

$$\frac{1}{\rho^2} = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta, \qquad (2)$$

le direzioni degli assi della quadrica sono definite dai valori di α, β, γ cui corrispondono valori di ρ^2 che possono essere massimi e minimi, e questi valori sono i così detti quadrati dei semiassi della quadrica relativi alle direzioni medesime.

Si ha quindi per determinare tali valori α, β, γ, per (2) e (1):

$$\left.\begin{aligned} (a-\lambda)\alpha + n\beta + m\gamma &= 0, \\ n\alpha + (b-\lambda)\beta + l\gamma &= 0, \\ m\alpha + l\beta + (c-\lambda)\gamma &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

equazioni conciliabili sotto la condizione necessaria e sufficiente che λ soddisfaccia all'equazione cubica:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & n & m \\ n & b-\lambda & l \\ m & l & c-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Quest'equazione, si dimostra facilmente, ha tre radici reali, ognuna delle quali determina, mediante (1) e (3), una corrispondente terna di valori $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$. Dalle stesse (3) scaturisce poi che i valori corrispondenti a due radici distinte definiscono direzioni fra loro ortogonali; oltre di che per (2) e (3 , indicando con ρ^2 il valore corrispondente a $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$:

$$\lambda = \frac{1}{\rho^2}.$$

Così, supposti dati i parametri d'una terna vettoriale, la (4) determina per mezzo di essi le tre quantità, in seguito a che le (3) e (1) forniscono le direzioni corrispondenti.

Distinguendo cogli indici 1, 2, 3 le tre radici, e i corrispondenti valori di α, β, γ, le misure delle tre quantità saranno λ_1, λ_2, λ_3, e le direzioni quelle i cui coseni sono $\pm\alpha_i$, $\pm\beta_i$, $\pm\gamma_i$, $(i = 1, 2, 3)$.

Con ciò si ha poi, per (3):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i \lambda_i &= a\alpha_i + n\beta_i + m\gamma_i, \\ \beta_i \lambda_i &= n\alpha_i + b\beta_i + l\gamma_i, \\ \gamma_i \lambda_i &= m\alpha_i + l\gamma_i + c\gamma_i, \\ &(i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

E di qui:

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_3^2\lambda_3, \\ b &= \beta_1^2\lambda_1 + \beta_2^2\lambda_2 + \beta_3^2\lambda_3, \\ c &= \gamma_1^2\lambda_1 + \gamma_2^2\lambda_2 + \gamma_3^2\lambda_3, \\ l &= \beta_1\gamma_1\lambda_1 + \beta_2\gamma_2\lambda_2 + \beta_3\gamma_3\lambda_3, \\ m &= \gamma_1\alpha_1\lambda_1 + \gamma_2\alpha_2\lambda_2 + \gamma_3\alpha_3\lambda_3, \\ n &= \alpha_1\beta_1\lambda_1 + \alpha_2\beta_2\lambda_2 + \alpha_3\beta_3\lambda_3, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

relazioni che forniscono i parametri della terna in termini degli elementi diretti.

Infine, come caso limite si tratta agevolmente quello di due o tre quantità eguali, e si ritrovano le relative circostanze particolari (§ 54).

Terna vettoriale applicata o localizzata.

§ 56. — Giova infine considerare anche la riunione d' una terna vettoriale e d' un punto: ciò che chiameremo una terna vettoriale " applicata „ o " localizzata „, di cui il punto è " punto d'applicazione „.

Limite.

§ 57. — Indicando con $f\big((x)\big)$ una funzione delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$, che, per fissare le idee, supporremo suscettibili di tutti i valori reali, o, per esprimerci brevemente, del posto (x) di quell'insieme n volte infinito, e inteso che i valori delle variabili e della funzione siano numeri, per " limite di $f\big((x)\big)$, col tendere del posto (x) ad un posto fisso (a), oppure all'infinito „, s' intenderà, *quando esiste,* il numero A, tale che, fissato il numero ε positivo piccolo finchè si vuole, pur di prendere (x) in un intorno sufficientemente limitato di (a), e nel caso dell'infinito, invece, fuori d'un intorno sufficientemente esteso di (a), è

$$|f\big((x)\big) - A| < \varepsilon.$$

Si dice poi che, col tendere di (x) ad $(a$, o all'infinito, $f\big((x)\big)$ " cresce infinitamente „, o " tende ad infinito „, quando $\frac{1}{f\big((x)\big)}$ ha per limite zero.

§ 58. — Una quantità sarà funzione di (x) quando lo è la sua misura, e reciprocamente. Supposto che, col tendere di (x) ad (a) (o all'infinito), la misura abbia per limite A, la quantità fissa di cui la misura è A (s'intende sempre rispetto ad una certa unità) si dirà il limite della quantità variabile.

§ 59. — Immaginato un asse variabile col posto (x), s'intenderà per suo " limite col tendere di (x) ad (a), oppure all'infi-

nito „, *quando esiste,* l'asse avente la proprietà che, fissato un angolo piccolo a piacere, riesce minore di esso l'angolo dei due assi, pur di prendere (x) in un intorno abbastanza piccolo di (a), e nel caso dell'infinito, fuori d'un intorno abbastanza esteso di (a).

§ 60. — Un vettore sarà funzione del posto (x) quando lo è, in generale, la sua quantità e il suo asse, e reciprocamente. Se questi, col tendere di (x) ad (a) (o all'infinito), hanno limite, il vettore di cui la quantità e l'asse sono i limiti si dirà il limite del vettore variabile.

Coefficiente differenziale secondo un asse.

§ 61. — Rappresenti s la misura del segmento d'un asse, avente l'origine in un certo punto, e il termine in un punto qualsivoglia. Se $F(s)$ rappresenta una funzione di s, sarà il suo coefficiente differenziale:

$$F'(s) = \frac{dF(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \gtrless 0} \frac{F(s+\Delta s)-F(s)}{\Delta s}. \tag{1}$$

Ora, sia $F(s)$ ricavata da una funzione $f(x, y, z)$ delle coordinate del punto qualunque dello spazio, stabilendo che il punto appartenga al supposto asse, per modo che, indicando con a, b, c le coordinate dell'origine, e con α, β, γ i coseni di direzione dell'asse, abbiasi:

$$x = a + s\alpha, \qquad y = b + s\beta, \qquad z = c + s\gamma. \tag{2}$$

Intesa la $f(x, y, z)$ finita e continua insieme coi suoi coefficienti differenziali parziali, per la legge della differenziazione delle funzioni composte, sarà:

$$F'(s) = f'_x(x, y, z)\,\alpha + f'_y(x, y, z)\,\beta + f'_z(x, y, z)\,\gamma,$$

dove si debbono intendere introdotte le (2); ossia rappresentando, in ogni caso, con uno stesso simbolo, V, la funzione in discorso del posto x, y, z:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dx}\alpha + \frac{dV}{dy}\beta + \frac{dV}{dz}\gamma. \tag{3}$$

Si chiama $\frac{dV}{ds}$ il coefficiente differenziale (o la derivata) della V secondo l'asse considerato; e la relazione ora dedotta stabilisce il suo legame colle $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, e i coseni di direzione dell'asse.

Quando (1) fornisca un risultato diverso secondo che è $\Delta s > 0$ o $\Delta s < 0$ bisogna distinguere il coefficiente differenziale secondo il supposto asse " nel senso positivo „ e " nel senso negativo „. La (3) sta per ambedue, intendendo che a seconda $F'(s)$ indica il primo oppure il secondo, il coefficiente differenziale secondo ogni asse coordinato sia nel senso formante col supposto asse l'angolo acuto oppure l'ottuso.

§ 62. — Per la precedente relazione, affinchè la componente d'un vettore secondo un asse qualsivoglia sia il coefficiente differenziale d'una funzione dei posti dello spazio secondo questo asse, è necessario e sufficiente che la proprietà si verifichi per tre assi ortogonali; che se questi s'intendono essere i soliti assi cartesiani, e si indicano con X, Y, Z le componenti del vettore secondo gli assi medesimi, la condizione si traduce in

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz}.$$

Una tale funzione, V, quando esiste, si dice in generale la " funzione dei vettori „ della specie supposta.

§ 63. — Immaginiamo due assi passanti per un punto, le misure dei cui segmenti siano rappresentate da r, s. Indichi M un punto qualunque del secondo asse; N il piede della perpendicolare descritta da esso sul primo, vale a dire la sua proiezione sul primo: Δs e Δr gli aumenti delle misure dei segmenti dei due assi relativi al passaggio dal punto d'incontro ad M ed N rispettivamente. Sarà:

$$\Delta s \cos(rs) = \Delta r.$$

E per conseguenza:

$$\frac{dr}{ds} = \cos(rs).$$

La qual relazione si estende naturalmente all'ipotesi che s rap-

presenti la misura d'un arco di linea qualunque terminato ad un suo punto, r la misura dell'arco d'un'altra linea, anche qualunque, terminato ad una proiezione (sempre inteso ortogonale) del punto suddetto sulla linea medesima, e $\cos(rs)$ il coseno dell'angolo delle tangenti volte nel senso in cui i due archi crescono.

Integrale esteso ad un campo.

§ 64. — Pel largo uso che faremo dell'integrale esteso ad un campo giova premettere raccolte alcune proposizioni che vi si riferiscono.

Supporremo (salvo indicazione contraria) indifferentemente il caso d'un campo a tre, a due o ad una dimensione; τ indicherà la grandezza dell'estensione, e sarà talvolta anche preso per simbolo del campo; (x) il posto qualunque; $V = f\big((x)\big)$ una funzione di (x) nel campo, che, per fissare le idee, intenderemo sia continua e finita.

Ciò posto, per integrale di V o $f\big((x)\big)$ esteso al campo τ s'intenderà il numero I, *esistente nelle suddette ipotesi*, tale che, fissato ε positivo piccolo finchè si vuole, pur di decomporre il campo in tante parti comprendibili entro una sfera di raggio abbastanza piccolo, si ha:

$$|\Sigma_t V \Delta \tau - I| < \varepsilon,$$

dove $\Delta \tau$ dinota la grandezza dell'estensione della parte qualunque, V il valore della funzione in un posto *qualsivoglia* del campo da essa rappresentato, e la sommatoria comprende tutte le parti.

Ciò esprimiamo brevemente col chiamare l'integrale " limite di detta somma col tendere d'ogni parte ad un punto ", e lo indichiamo col noto simbolo

$$\int_t V d\tau,$$

ove l'indice τ ordinariamente si può tralasciare.

§ 65. — " Indicando con W una funzione come la V, la quale inoltre in tutto il campo non muti segno, si ha:

$$\int V W d\tau = \bar{V} \int W d\tau;$$

dove, sotto la semplice condizione che le funzioni siano integrabili, e, in primo luogo, V abbia limite inferiore e superiore finito, $\bar{V}$ rappresenta un numero compreso fra quei due limiti — ciò che è una conseguenza immediata della premessa definizione dell'integrale; che se V s'intende anche continua, $\bar{V}$, per una nota proprietà, rappresenterà il valore della funzione in un punto del campo. „

§ 66. — " Se in ogni parte $\Delta\tau$ del campo, per limitata che sia, è:

$$\int_{\Delta\tau} V d\tau = 0, \tag{1}$$

e il campo si può decomporre in un certo numero di regioni, in ciascuna delle quali V è finita e continua, sarà, in tutto il campo, $V = 0$. „

Difatti, supposto V diverso da zero in un posto, dovrà mantenere lo stesso segno in un intorno di esso, pel quale non potrà verificarsi la (1).

§ 67. — Sia il campo τ a tre dimensioni, e così fatto che il suo contorno si decomponga in due calotte, incontrate ciascuna in un punto da ogni perpendicolare al piano xy il cui piede giace entro la proiezione del comune contorno: e questa linea si decomponga alla sua volta in due rami incontrati ciascuno in un punto da ogni perpendicolare all'asse delle x il cui piede giace entro le proiezioni dei termini comuni. Supposte x, y, z le coordinate ordinarie del posto qualsiasi, il campo sarà definito da

$$x_1 \leq x < x_2, \quad y_1 < y \leq y_2, \quad z_1 < z \leq z_2,$$

dove x_1, x_2 sono fissi, y_1 e y_2 funzioni di x in quell'intervallo, e z_1, z_2 funzioni di x, y nel campo definito dalle due prime relazioni. Allora, come il calcolo infinitesimale insegna:

$$\int V d\tau = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} V dz.$$

3*

§ 68. — *Teorema di Gauss.* Manteniamo relativamente al campo le ipotesi del precedente §, e in esso, oltre V, sia continua (esclusa, se capita, la superficie) e finita $\frac{dV}{dz}$. Indichiamo con σ, σ_1, σ_2 la superficie del campo, e quella delle calotte formate dai punti d'entrata e d'uscita delle perpendicolari al piano xy volte come l'asse delle z: e con $\cos(nz)$, $\cos(n_1 z)$, $\cos(n_2 z)$ il coseno dell'angolo formato coll'asse delle z dalla normale nel punto qualunque di ciascuna, volta verso l'interno, per modo che $\cos(n_1 z)$ positivo e $\cos(n_2 z)$ negativo. Abbiamo, conformemente alla precedente espressione:

$$\int \frac{dV}{dz} d\tau = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} (V_{z_2} - V_{z_1})\, dy = -\int_{\sigma_1} V_{z_1} \cos(n_1 z)\, d\sigma_1 - \int_{\sigma_2} V_{z_2} \cos(n_2 z)\, d\sigma_2 .$$

E per conseguenza, intendendo che nel secondo membro V si riferisca alla superficie:

$$\int \frac{dV}{dz} d\tau = -\int V \cos(nz)\, d\sigma .$$

La qual relazione si svincola agevolmente dalle restrizioni imposte al campo, concependolo decomposto, quando non vi soddisfaccia, in regioni che vi soddisfanno, mediante diaframmi, il cui contributo nella somma degli integrali di superficie si elide. Che se, un campo concependosi così composto, la funzione ammette le prescritte proprietà in ogni regione, ma non nell'insieme, sta la relazione medesima, intendendo che σ rappresenti la superficie complessiva delle regioni.

§ 69. — Si riconoscerà agevolmente come un analogo teorema si possa enunciare per un campo a due dimensioni, e con una funzione in esso definita.

§ 70. — Notiamo infine che, se si pone:

$$\mathrm{X} = \int k X d\tau , \quad \mathrm{Y} = \int k Y d\tau , \quad \mathrm{Z} = \int k Z d\tau ,$$

$$\mathrm{M}_x = \int k\big((y-b) Z - (z-c) Y\big)\, d\tau ,$$

$$\mathrm{M}_y = \int k\big((z-c) X - (x-a) Z\big)\, d\tau ,$$

$$\mathrm{M}_z = \int k\big((x-a) Y - (y-b) X\big)\, d\tau ,$$

dove k, X, Y, Z sono funzioni del posto (x, y, z del campo aventi le proprietà della V dei precedenti §§, e (a, b, c) rappresenta un posto fisso, le X, Y, Z, M_x, M_y, M_z verificheranno le relazioni trovate per le espressioni rappresentate dagli stessi simboli nei §§ 44 — 52, o relazioni analoghe che si dedurranno immediatamente sostituendo l'integrale alla sommatoria.

Noi chiameremo, nei casi opportuni, i vettori (X, Y, Z) e (M_x, M_y, M_z) risultanti d'un insieme di vettori, e dei momenti del corrispondente insieme di vettori applicati ai punti (x, y, z) rispetto al polo (a, b, c); i quali termini si debbono intendere attribuiti per ragione d'analogia.

Integrale secondo un cammino.

§ 71. — Cammino conducente da un posto (a) ad un posto (b) — " origine " e " termine " — si chiama la successione dei posti (x) di un campo, tali che le relative x_1, x_2, . . . x_n sono altrettante funzioni finite e continue di una variabile t in un intervallo ($\alpha\,\beta$), il cui valore è a_1, a_2, . . . a_n per $t = \alpha$ e b_1, b_2, . . . b_n per $t = \beta$, corrispondente alla successione dei valori di t che comincia con α e finisce con β — origine e termine dell'intervallo.

È chiaro che nel caso della doppia e triplice infinità, intendendo che le variabili rappresentino le coordinate di un punto del piano e dello spazio, corrisponderà ad ogni cammino una linea limitata ai punti rappresentanti l'origine e il termine del cammino, la quale al variare di t da α a β verrà percorsa dal punto variabile corrispondente al valore variabile di t, dal primo al secondo estremo, con una certa legge, per cui, a seconda del caso, passerà per ogni punto della linea una volta sola, oppure ripetutamente. Di qui trae origine il nome.

Per fissar le idee, discorreremo nei seguenti §§ del caso di tre dimensioni, avvertendo che il ragionamento sta in generale.

§ 72. — Siano X, Y, Z tre funzioni delle variabili x, y, z in un campo, finite e continue, dalle quali si ricavino tre funzioni di t in ($t_1\,t_2$), X_t, Y_t, Z_t, prendendo per x, y, z tre funzioni di t nello stesso intervallo, che definiscono un cammino condu-

cente da (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2); e queste funzioni ammettano coefficiente differenziale finito e continuo. Esisterà:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt} \right) dt,$$

e sarà eguale a:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(X_s \frac{dx}{ds} + Y_s \frac{dy}{ds} + Z_s \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

dove s rappresenta una qualsiasi funzione finita e continua di t, insieme col suo coefficiente differenziale, e s_1, s_2 sono i suoi valori per t_1 e t_2. E questo si chiama l'" integrale di:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

secondo il cammino „ che indicheremo con C; e si rappresenta con

$$\int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz);$$

che, se non c'è equivoco, il simbolo del cammino si tralascia.

§ 73. — Sia nel campo V funzione finita e continua di x, y, z, e

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz}. \tag{1}$$

Sarà:

$$\int_{t_1}^{t} \left(X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt} \right) dt = V(x, y, z) - V(a_1, b_1, c_1),$$

dove x, y, z, nel secondo membro, corrispondono al valor t, come si desume dall'eguaglianza del coefficiente differenziale dei due membri e del loro limite col tendere di t a t_1. Quindi:

$$\int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = V(a_2, b_2, c_2) - (a_1, b_1, c_1). \tag{2}$$

In conseguenza di che, in tale ipotesi — inteso che V sia funzione ad un sol valore (cfr. § 75) — l'integrale non muta che che coll'origine e col termine; inoltre, se questi cadono in uno stesso posto del campo, l'integrale ha valor zero.

§ 74. — Concepito (X, Y, Z) come un vettore si chiama l' " integrale del vettore secondo il cammino C „.

Per quanto precede, se esiste la relativa funzione dei vettori dotata delle ammesse proprietà, il valore dell'integrale è la differenza dei valori di questa funzione fra il termine e l'origine.

Funzioni plurivalenti.

§ 75. — È sempre sottinteso che il valore d'una funzione in ogni posto sia unico. In alcune questioni giova coordinare ai singoli posti d'un campo un intero gruppo di valori, che si concepiscono come tutti appartenenti ad una funzione dei posti medesimi, la quale si chiama " a più valori „ o " plurivalente „; termini cui si contrappongono quelli di " ad un sol valore „ od " univalente „.

Con questa estensione, supposto il cammino C tale da determinare nel suo termine un solo valore di V succedente con continuità al valore nell'origine indicato da $V(a_1, b_1, c_1)$, sta la (2, § 73) pur d'intendere che $V(a_2, b_2, c_2)$ rappresenti quel valore.

Aggiungiamo che, per l'esistenza della funzione V, tale che hanno luogo le (1, § 73), risulta, colla stessa estensione, necessario e sufficiente che X, Y, Z ammettano i coefficienti differenziali rispetto alle due variabili eteronime, parimente finiti e continui, e sia:

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz}, \quad \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}.$$

Superficie di livello.

§ 76. — Supposto il vettore (X, Y, Z) funzione finita e continua del posto (x, y, z) d'un campo, ed esistente la funzione dei vettori, V, la quale, mentre il vettore si suppone, come d'ordinario, ad un sol valore, possa essere anche funzione pluriva-

lente del posto medesimo, giova considerare la famiglia semplicemente infinita di superficie definita dall'equazione

$$V = Costante, \qquad (1)$$

e quella delle sue trajettorie normali, le cui equazioni differenziali sono:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z};$$

chiamate " superficie di livello „ e " linee di flusso „ della considerata specie di vettori.

Ogni posto del campo determina in ogni caso una sola linea di flusso; d'onde è agevole inferire che determina anche una sola superficie di livello; soltanto che, nel caso della plurivalenza, ad una stessa superficie di livello corrisponde l'intero gruppo dei valori della funzione dei vettori in ogni suo punto. E la direzione del vettore in ogni posto del campo — emerge senz'altro dalle precedenti equazioni — è quella della tangente alla linea di flusso e della normale alla superficie di livello determinate da quel posto, nel posto medesimo.

Concepito un posto del campo e attribuita alla costante di (1) una successione dei valori formante un certo intervallo, ne verrà determinata una successione continua di punti della linea di flusso passante per quel posto; la successione cioè dei punti d'intersezione della linea colle superficie di livello relative a quei valori della costante; e uno stesso punto non potrà presentarsi più d'una volta se a valori diversi della costante corrispondono superficie di livello anche diverse, mentre invece si ripresenterà ogniqualvolta una stessa superficie corrisponda a valori diversi dell'intervallo. Ne viene che le linee di flusso non potranno essere rientranti nel caso della funzione dei vettori univalente, mentre si potranno chiudere nell'opposto caso.

CINEMATICA.

CAPITOLO PRIMO.

SPOSTAMENTO.

Spostamento di un punto.

§ 77. — " Spostamento di un punto corrispondente al passaggio da un posto ad un altro „ chiamiamo il segmento orientato (§ 29) la cui grandezza è quella della mutua distanza dei due posti, e l'orientazione quella della loro congiungente volta dal primo al secondo.

I due posti si chiameranno anche la " posizione iniziale „ e " finale „ del punto a cui lo spostamento si riferisce. Essi determinano lo spostamento: e ciascun d'essi è determinato dallo spostamento e dall'altro.

§ 78. — Assunto un sistema d'assi cartesiani ortogonali, siano (x, y, z), (x', y', z') e (ξ, η, ζ) la posizione iniziale e finale e lo spostamento corrispondente. Sarà:

$$x' - x = \xi, \qquad y' - y = \eta, \qquad z' - z = \zeta.$$

§ 79. — Lo spostamento relativo al passaggio d'un punto da un posto ad un altro si potrà concepire come risultante o composto di due o più spostamenti analoghi, secondo la definizione generale (§ 34). Notiamo che, se s'immagina un posto come posizione iniziale, e un punto il quale passa da esso al posto che rappresenta, con quella posizione iniziale, la posizione finale relativa d'un componente; quindi da questo posto a quello che, con esso per posizione iniziale, rappresenta la posizione finale relativa ad un altro componente; e così via, finchè si sono

presi tutti i componenti; l'ultimo posto a cui il punto arriva sarà la posizione finale del punto relativa allo spostamento risultante col primo posto considerato per posizione iniziale.

Conformemente al § 35, se (ξ, η, ζ) è risultante o composto degli n spostamenti (ξ_i, η_i, ζ_i) $(i = 1, 2, .. n)$, sarà:

$$\xi = \Sigma \xi_i, \qquad \eta = \Sigma \eta_i, \qquad \zeta = \Sigma \zeta_i,$$

e reciprocamente.

Spostamento d'un sistema.

§ 80. — " Spostamento d'un sistema corrispondente al passaggio da una posizione ad un'altra „ e l'insieme degli spostamenti dei singoli punti che compongono il sistema corrispondenti al passaggio dalla posizione iniziale alla posizione finale relativa.

L'insieme delle posizioni iniziali e finali dei singoli punti costituisce la posizione iniziale e finale del sistema.

Ogni dipendenza particolare dello spostamento dei singoli punti dalla posizione iniziale o finale definisce uno spostamento del sistema di particolar natura.

§ 81. — " Risultante „ o " composto „ di più spostamenti si dice lo spostamento d'un sistema quando lo spostamento d'ogni punto è risultante o composto degli spostamenti che a quelli separatamente corrispondono (§ 79).

Spostamento traslatorio.

§ 82. — " Spostamento traslatorio „ d'un sistema è quello pel quale lo spostamento è eguale per tutti i punti.

Questo spostamento comune si chiama la " traslazione „ del sistema. Esso definisce lo spostamento traslatorio, il quale riesce così determinato da un semplice vettore.

Evidentemente per lo spostamento in discorso le mutue distanze dei punti sono le stesse nella posizione iniziale e finale.

Spostamento rotatorio.

§ 83. — " Spostamento rotatorio " di un sistema si dice quello pel quale la posizione iniziale e finale dei singoli punti sono sopra una circonferenza di cerchio col centro sopra una retta fissa, in un piano ad essa perpendicolare: si succedono per tutti i punti in senso concorde: e limitano un arco di lunghezza proporzionale al raggio.

Ne viene che l'angolo non maggiore, in grandezza assoluta, di due retti, o in generale compreso fra gli stessi termini, di cui deve girare un semipiano terminato alla retta fissa per passare dalla posizione iniziale alla posizione finale d'un punto è lo stesso per tutti i punti del sistema.

La retta fissa, con un certo senso, si chiama l' " asse di rotazione ": e quest'angolo, con misura positiva o negativa, secondo che corrisponde ad un giro positivo o negativo rispetto all'asse, " angolo di rotazione ". Per lo studio d'uno spostamento isolato basta considerare di quest'angolo il valore in grandezza assoluta non maggiore di due retti; ma in generale occorre concepirlo suscettibile anche degli altri valori (§ 12).

Il vettore avente l'asse orientato come l'asse di rotazione, e l'angolo di rotazione per quantità si chiamerà la " rotazione " del sistema.

Con una data posizione iniziale, e ogni altra deducibile da essa con uno spostamento traslatorio (§ 82), lo spostamento rotatorio è definito dalla rotazione e da un punto dell'asse di rotazione: quindi da un vettore applicato.*

Anche per lo spostamento rotatorio evidentemente non cambia la mutua distanza dei punti nella posizione iniziale e finale.

E da ovvie osservazioni si desume che uno spostamento che soddisfaccia a questa condizione e a quella che due punti invariabilmente uniti col sistema — cioè che serbano distanza invariata da ogni punto del sistema — abbiano spostamento

---

* Di qui il termine *rotor* proposto da *Clifford* per il vettore localizzato (*Elements of Dynamic*, London, 1878. Parte I, pag. 123; *Il senso comune nelle scienze esatte* — trad. ital. — pag. 250).

nullo, se non è uno spostamento nullo, sarà necessariamente rotatorio, colla retta dei due punti per asse.

Spostamento rototraslatorio ed elicoidale.

§ 84. — " Rototraslatorio „ chiamiamo ogni spostamento composto d'un traslatorio e d'un rotatorio: ed " elicoidale „ quello in cui la traslazione del primo e la rotazione del secondo sono fra loro parallele.

Spostamento rigido.
Ogni spostamento rigido si riduce ad uno spostamento elicoidale.

§ 85. — " Rigido „ si chiama ogni spostamento conciliabile colla rigidità del sistema, cioè tale che le mutue distanze dei punti sono le stesse nella posizione iniziale e finale. Esso può concepirsi definito dalla proprietà che col sistema si può congiungere una terna d'assi ortogonali rispetto a cui la posizione d'un punto qualsivoglia è la stessa in ambedue le posizioni; la quale si dice invariabilmente connessa col sistema (§ 24). Per conseguenza, se s'immaginano due terne d'assi coordinati l'una fissa, e l'altra connessa col sistema, le quali nella posizione iniziale si suppongono coincidere, indicando con x, y, z e x', y', z', le coordinate d'un punto qualsivoglia rispetto alla prima terna nella posizione iniziale e finale rispettivamente, saranno x, y, z le coordinate dello stesso punto rispetto alla seconda terna in ambedue le posizioni, e pel § 21, col medesimo significato dei simboli α, β, γ e α_i, β_i, γ_i, $(i = 1, 2, 3)$:

$$x' = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$
$$y' = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$
$$z' = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z;$$

donde per le componenti dello spostamento dello stesso punto rispetto agli assi fissi:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + (\alpha_1 - 1)x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + (\beta_2 - 1)y + \beta_3 z, \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + (\gamma_3 - 1)z. \end{aligned} \qquad (1)$$

Queste formole si possono assumere per definizione dello spostamento rigido; e ne risulta che le componenti sono funzioni lineari delle coordinate iniziali, ove i coefficienti delle prime potenze soddisfanno a speciali relazioni immediatamente deducibili dalle note relazioni fra i coseni di direzione d'una terna d'assi ortogonali rispetto ad un'altra (§ 24).

§ 86. — In virtù di tali relazioni è:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 - 1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 - 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad (1)$$

e perciò in generale non vi sarà alcun punto pel quale:

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

cioè lo spostamento nullo.

§ 87. — Invece, in generale, lo spostamento considerato risulta composto dello spostamento traslatorio la cui traslazione è (α, β, γ), spostamento dell'origine della terna connessa col sistema, e di quello le cui componenti sono:

$$\begin{gathered} (\alpha_1 - 1)\,x + \alpha_2\,y + \alpha_3\,z \\ \beta_1\,x + (\beta_2 - 1)\,y + \beta_3\,z \\ \gamma_1\,x + \gamma_2\,y + (\gamma_3 - 1)\,z, \end{gathered}$$

ch'è uno spostamento rotatorio intorno ad un asse passante per l'origine medesima, poichè, in virtù di (1) del § precedente, lo spostamento è nullo per tutti i punti (x, y, z) tali che:

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3}, \qquad (1)$$

indicando con Δ_1, Δ_2, Δ_3 i minori del determinante corrispondenti agli elementi di una riga qualsivoglia (cfr. § 83).

Così troviamo, in primo luogo, che ogni spostamento rigido si può ridurre in infiniti modi ad uno spostamento rototraslatorio (§ 84).

§ 88. — Se $\alpha = \beta = \gamma = 0$, cioè se si suppone nullo lo spostamento di un punto, si ha semplicemente uno spostamento rotatorio coll'asse passante per questo punto.

§ 89. — Supponiamo poi una almeno delle α, β, γ diversa da zero, e indicando con Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 i minori del determinante suddetto corrispondenti agli elementi della colonna col numero d'ordine della riga cui corrispondono Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\alpha \Delta'_1 + \beta \Delta'_2 + \gamma \Delta'_3 = 0: \qquad (2)$$

relazione, che, il determinante in discorso essendo zero, ammessa per una colonna, sta per tutte. Si trova prendendo, per esempio, la prima colonna, $\Delta'_1 = \Delta_1$, e per le relazioni fra le α_i, β_i, γ_i:

$$\Delta'_2 = \Delta_2, \qquad \Delta'_3 = \Delta_3;$$

quindi la suddetta relazione equivale a:

$$\alpha \Delta_1 + \beta \Delta_2 + \gamma \Delta_3 = 0;$$

la quale, per le (1, § 85), esprime che la rotazione e la traslazione sono fra loro perpendicolari, ossia lo spostamento " parallelo ad un piano ".

Le condizioni espresse da (2) sono richieste perchè, non ostante (1, § 86), le (1, § 85), per qualche valore di x, y, z, forniscano $\xi = \eta = \zeta = 0$.

Ora, intendiamo prese per asse delle z l'asse della rotazione, per modo che la traslazione riesca parallela al piano xy; e rappresentiamo l'angolo di rotazione con φ. Le (1, § 85) si riducono a:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + (\cos\varphi - 1)\, x + \sin\varphi\, y \\ \eta &= \beta - \sin\varphi\, x + (\cos\varphi - 1)\, y \\ \zeta &= 0; \end{aligned}$$

e poichè:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

per un certo valore di x, y sarà $\xi = \eta = 0$: cioè per una certa retta parallela all'asse di rotazione lo spostamento è nullo; donde si conclude che il supposto spostamento parallelo ad un piano si riduce ad uno spostamento rotatorio determinato.

§ 90. — Emerge dalle (1, § 85) che in infiniti modi si può ridurre uno spostamento rigido ad uno spostamento rototraslatorio, perchè, mutando il punto preso per origine della terna

connessa col sistema, muterà in generale la traslazione, ch' è lo spostamento di quel punto, e la posizione dell'asse della rotazione; mentre questa resterà invariata, come puramente dipendente da α_i, β_i, γ_i, $(i = 1, 2, 3)$, che si mantengono invariate al mutare il punto medesimo.

Ora, concependo il componente traslatorio decomposto in due, l'uno parallelo e l'altro perpendicolare all'asse del rotatorio, il secondo e il componente rotatorio hanno per risultante uno spostamento rotatorio con diverso asse, ma la stessa rotazione del componente rotatorio (§ 89). E da ciò si conclude che " ogni spostamento rigido si riduce (inteso che, se lo spostamento è rotatorio, la relativa traslazione sia nulla, e se è traslatorio, nulla la rotazione) ad uno spostamento elicoidale (§ 84) ".

Spostamento dislocatorio semplice.

§ 91. — " Spostamento dislocatorio semplice " chiamiamo ogni spostamento d'un sistema, pel quale, come nello spostamento rigido (caso particolare in cui la dislocazione relativa dei punti è nulla), le componenti dello spostamento d'ogni punto sono funzioni lineari delle coordinate (rispetto ad una terna d'assi comunque scelti) della posizione iniziale: donde segue che lo saranno egualmente le coordinate della posizione finale; — colla condizione che il determinante dei coefficienti delle coordinate in queste ultime sia diverso da zero, per modo che reciprocamente le coordinate della posizione iniziale riescano funzioni lineari di quelle dell'iniziale. Ne viene in primo luogo: che ad una retta e ad un piano della posizione iniziale corrisponderanno parimente una retta ed un piano della finale, e in generale che ad una linea e ad una superficie della posizione iniziale corrisponderà una linea ed una superficie del medesimo ordine della posizione finale; la qual proprietà si può assumere, se si vuole, come definizione dello spostamento in discorso. Inoltre al punto d'incontro di due rette, e alla retta d'intersezione di due piani della prima posizione, corrisponderà il punto d'incontro e la retta d'intersezione delle rette e dei piani corrispondenti della

seconda: in conseguenza di che a rette e piani paralleli corrisponderanno rette e piani egualmente paralleli.

§ 92. — Siano:

$$\begin{array}{ll} a + a_1 x + a_2 y + a_3 z & a + (a_1 + 1) x + a_2 y + a_3 z \\ b + b_1 x + b_2 y + b_3 z, & b + b_1 x + (b_2 + 1) y + b_3 z, \\ c + c_1 x + c_2 y + c_3 z & c + c_1 x + c_2 y + (c_3 + 1) z \end{array}$$

le componenti dello spostamento e le coordinate finali del punto le cui coordinate iniziali sono x, y, z, dove, posto:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + 1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 + 1 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 + 1 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

si suppone D diverso da o.

Innanzi tutto lo spostamento del sistema sarà composto dello spostamento traslatorio la cui traslazione è (a, b, c), e di quello per cui lo spostamento del punto le cui coordinate iniziali sono x, y, z ha per componenti:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= c_1 x + c_2 y + c_3 z, \end{aligned} \qquad (2)$$

per modo che le coordinate finali sono:

$$\begin{aligned} x' &= (a_1 + 1) x + a_2 y + a_3 z \\ y' &= b_1 x + (b_2 + 1) y + b_3 z \\ z' &= c_1 x + c_2 y + (c_3 + 1) z. \end{aligned} \qquad (3)$$

Questo spostamento si distinguerà colla qualifica di " omogeneo ". Per esso il punto che nella posizione iniziale occupa l'origine del supposto sistema d'assi coordinati ha spostamento nullo; lo chiameremo l' " origine " dello spostamento.

§ 93. — Indichino r e α, β, γ, r' e α', β', γ' la grandezza e i coseni di direzione del raggio descritto dall'origine, terminato ai punti x, y, z e x', y', z', posizione iniziale e finale d'uno stesso punto del sistema. Sarà:

$$\begin{aligned} x &= r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma \\ x' &= r'\alpha', \; y' = r'\beta', \; z' = r'\gamma'. \end{aligned}$$

Quindi per le (3) del § precedente:

$$\begin{aligned} r'\alpha' &= r\left((a_1 + 1)\,\alpha + a_2\,\beta + a_3\,\gamma\right) \\ r'\beta' &= r\left(b_1\,\alpha + (b_2 + 1)\,\beta + b_3\,\gamma\right) \\ r'\gamma' &= r\left(c_1\,\alpha + c_2\,\beta + (c_3 + 1)\,\gamma\right), \end{aligned} \tag{4}$$

donde, valendosi di:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$

si dedurranno $\frac{r'}{r}$ e α', β', γ'.

Poichè $\frac{r'}{r}$ riuscirà generalmente diverso da 1, si vede che lo spostamento considerato implica in generale una variazione della mutua distanza dei punti.

Questo rapporto risulta indipendente dalla grandezza r, e determinato dalla direzione $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$ del supposto raggio.

Se poi s'immaginano nella posizione iniziale due altri punti quali si vogliano limitanti un segmento di cui r sia la grandezza e $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$ la direzione, si desume agevolmente dalla circostanza che a coppie di punti limitanti segmenti paralleli corrispondono coppie di punti limitanti segmenti egualmente paralleli (§ 91) che i punti corrispondenti della posizione finale limiteranno un segmento la cui grandezza sarà r' e la direzione $(\pm\alpha', \pm\beta', \pm\gamma')$; per modo che lo stesso rapporto neppure dipende dalla posizione.

Inoltre risulta parimente dipendente dalla sola direzione $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$ del segmento limitato da due punti nella posizione iniziale la direzione $(\pm\alpha', \pm\beta', \pm\gamma')$ del segmento limitato dalle corrispondenti posizioni finali.

Chiameremo il numero $\frac{r'}{r} - 1$ "coefficiente di dilatazione lineare secondo la direzione $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$", e la misura dell'angolo formato dalle direzioni corrispondenti $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$ e $(\pm\alpha', \pm\beta', \pm\gamma')$ (il cui coseno sarà $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$), positiva o negativa secondo che il giro che conduce per l'angolo medesimo dalla prima alla seconda è positivo o negativo rispetto

alla perpendicolare al loro piano nel senso stabilito come positivo, " deviazione relativa alla direzione $(\pm \alpha, \pm \beta, \pm \gamma)$ ".

§ 94. — Consideriamo il tetraedro avente per vertici quattro punti qualunque (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$, al quale corrisponderà nella posizione finale il tetraedro avente per vertici i punti corrispondenti (x'_i, y'_i, z'_i). Le grandezze dei volumi dei due tetraedri saranno i valori assoluti dei due determinanti:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 & z'_2 - z'_1 \\ x'_3 - x'_1 & y'_3 - y'_1 & z'_3 - z'_1 \\ x'_4 - x'_1 & y'_4 - y'_1 & z'_4 - z'_1 \end{vmatrix};$$

e per le (3, § 92) la seconda sarà quindi il prodotto della prima per $|D|$ (§ 92), indipendente dai vertici.

Ne viene, poichè il volume d'una figura qualsivoglia composta di punti del sistema sarà l'insieme o il limite dell'insieme dei volumi di tanti tetraedri, collo svanire di ciascun d'essi, che il rapporto del volume di una figura nello stato finale al suo volume nello stato iniziale sarà egualmente $|D|$. La differenza $|D| - 1$ si chiama il " coefficiente di dilatazione cubica ".

§ 95. — Supponiamo:

$$\xi = \lambda x, \qquad \eta = \lambda y, \qquad \zeta = \lambda z, \qquad (1),$$

cioè, pel punto la cui posizione iniziale è (x, y, z), lo spostamento, s'è possibile, secondo la congiungente la posizione iniziale medesima coll'origine, oppure nullo.

Ne viene, col valore assoluto dei radicali:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \pm \lambda \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

dove si deve prendere + o — secondo che è λ positivo o negativo. E per conseguenza λ è il coefficiente di dilatazione secondo la direzione della congiungente l'origine col punto (x, y, z) (§ 93).

Le relazioni (1) sono soddisfatte da $x = y = z = 0$, cioè dall'origine. Supposta una almeno delle tre coordinate diverse da zero, poniamo:

$$x = r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad (2)$$

per modo che α, β, γ siano i coseni di direzione del suddetto raggio.

Per (1) e (2, § 92):

$$\begin{aligned} (a_1 - \lambda)\, \alpha + a_2\, \beta + a_3\, \gamma &= 0 \\ b_1\, \alpha + (b_2 - \lambda)\, \beta + b_3\, \gamma &= 0 \\ c_1\, \alpha + c_2\, \beta + (c_3 - \lambda)\, \gamma &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

le quali equazioni sono conciliabili sotto la condizione necessaria e sufficiente che sia:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \quad \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Questa è un'equazione in λ, che, essendo cubica, ne fornirà uno o tre valori (reali) — lasciando in disparte il caso che due o tre radici siano eguali; e introducendo questi valori nelle (3), si otterranno tre equazioni lineari, di cui una è conseguenza delle altre due, che, insieme colle (2), forniranno la direzione o le direzioni ($\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$) di altrettante rette uscenti dal centro per cui si verifica la suddetta proprietà.

Notiamo che, escluso il caso delle radici eguali, queste rette saranno una o tre.

Chiameremo le rette medesime " rette speciali dello spostamento ".

§ 96. — Lo spostamento (Ξ, Π, Z) tale che:

$$\begin{aligned} \Xi &= a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z \\ \Pi &= a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z \\ Z &= a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z \end{aligned} \tag{1}$$

si dirà " conjugato " collo spostamento definito dalle (2, § 92), e reciprocamente.

Quindi due spostamenti conjugati hanno egual coefficiente di dilatazione cubica: le rette speciali sono generalmente diverse, ma sempre in egual numero, corrispondendo, ad ogni retta speciale dell'uno, una dell'altra definita dalla stessa radice dell'equazione (4, § 95) comune ad ambedue: e il coefficiente di dilatazione secondo le direzioni di due rette speciali corrispondenti sarà, per entrambi gli spostamenti, lo stesso.

Indichiamo con A, B, Γ i coseni di direzione della retta speciale dello spostamento (Ξ, Η, Ζ) definita dalla radice λ di (4, § 95). Sarà:

$$\lambda \text{A} = a_1 \text{A} + b_1 \text{B} + c_1 \Gamma$$
$$\lambda \text{B} = a_2 \text{A} + b_2 \text{B} + c_2 \Gamma$$
$$\lambda \Gamma = a_3 \text{A} + b_3 \text{B} + c_3 \Gamma .$$

Quindi per (1) e (2, § 92):

$$\text{A}\,\xi + \text{B}\,\eta + \Gamma\,\zeta = \lambda\,(\text{A}\,x + \text{B}\,y + \Gamma\,z) ;$$

ossia " in uno spostamento dislocatorio semplice omogeneo la componente dello spostamento d'ogni punto secondo un asse parallelo ad una retta speciale dello spostamento conjugato ha per misura il prodotto della misura della distanza del posto iniziale del punto dal piano passante per l'origine, perpendicolare a questa retta, col segno + o — secondo che cade o no dalla parte dell'asse, e del coefficiente di dilatazione lineare secondo la direzione della retta medesima ".

§ 97. — Chiamiamo " simmetrico " lo spostamento (ξ, η, ζ) nell'ipotesi che sia:

$$c_2 = b_3 = l, \qquad a_3 = c_1 = m, \qquad b_1 = a_2 = n ;$$

e in questa ipotesi poniamo:

$$a_1 = a, \qquad b_2 = b, \qquad c_3 = c .$$

Lo spostamento conjugato coinciderà collo spostamento medesimo.

E per l'ultima proposizione: " la componente dello spostamento d'ogni punto secondo un asse parallelo ad una retta speciale ha per misura il prodotto della misura della distanza del posto iniziale dal piano passante per l'origine perpendicolare alla retta, col segno + o —, secondo che il posto cade o no dalla parte donde volge l'asse, pel coefficiente di dilatazione lineare secondo la direzione della retta medesima ".

Le (3, § 95) diventano:

$$\begin{aligned} (a - \lambda)\,\alpha + n\,\beta + m\,\gamma &= 0 \\ n\,\alpha + (b - \lambda)\,\beta + l\,\gamma &= 0 \\ m\,\alpha + l\,\beta + (c - \lambda)\,\gamma &= 0 , \end{aligned} \tag{1}$$

e perciò la (4 § 95):

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & n & m \\ n & b-\lambda & l \\ m & l & c-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Quindi, nel caso in discorso, le rette principali saranno generalmente tre, fra loro ortogonali; che se due radici della cubica saranno eguali, avranno la proprietà caratteristica di quelle rette tutte le perpendicolari descritte per l'origine alla retta corrispondente all'altra radice; e se le tre radici saranno eguali, tutte le rette descritte per l'origine fungeranno da rette speciali (cfr. § 55).

Queste rette si chiameranno le " rette principali di dilatazione lineare „. E conformemente a ciò si chiameranno " direzioni principali di dilatazione lineare „ le loro direzioni, e si distingueranno colla qualifica di " principali „ i coefficienti di dilatazione lineare corrispondenti.

§ 98. — Chiamiamo " spostamento dilatatorio normale ad un piano (base) „ lo spostamento d'un sistema pel quale lo spostamento d'ogni punto è perpendicolare ad un piano fisso, volto in un senso o nel senso opposto, secondo che il posto iniziale cade da una parte o dall'altra del piano, ed ha grandezza proporzionale alla distanza di questo posto dal piano; che se il posto iniziale appartiene al piano, lo spostamento del punto si intenderà nullo.

Il rapporto costante della grandezza dello spostamento a quella della distanza, col segno + o — secondo che il senso dello spostamento volge all'infuori del piano o verso il piano, sarà il coefficiente di dilatazione lineare secondo la direzione della perpendicolare al piano e lo chiameremo il " coefficiente di dilatazione principale „.

§ 99. — Stabiliti questi termini, lo spostamento simmetrico considerato risulta nel caso più generale composto di tre spostamenti dilatatorii normali, i cui piani (piani delle rette principali a due a due) passano per l'origine e sono fra loro ortogonali; e i coefficienti di dilatazione lineari principali (i tre così chiamati per lo spostamento simmetrico) sono le radici della

cubica (2, § 97), relative, conformemente alle (1, § 97), alle perpendicolari ai tre piani rispettivamente.

§ 100. — Lo spostamento simmetrico, per quanto precede, vien definito dalla terna vettoriale applicata all'origine, i cui parametri sono:

$$a, \quad b, \quad c, \quad l, \quad m, \quad n;$$

e cioè le direzioni e le quantità, rispettivamente le direzioni principali, $\pm \alpha_i$, $\pm \beta_i$, $\pm \gamma_i$, $(i = 1, 2, 3)$ e i coefficienti di dilatazione principali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, legati coi parametri medesimi dalle (5, § 55); la chiameremo la " terna vettoriale delle dilatazioni „ dello spostamento simmetrico considerato.

§ 101. — Riprendiamo lo spostamento omogeneo generale definito dalle (§ 2, § 92), e poniamo:

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = a, & a_2 = n - r, & a_3 = m + q, \\ b_1 = n + r, & b_2 = b, & b_3 = l - p, \\ c_1 = m - q, & c_2 = l + p, & c_3 = c, \end{array}\right\} \quad (1)$$

ossia:

$$a = a_1, \quad b = b_2, \quad c = c_3,$$

$$\left.\begin{array}{lll} l = \dfrac{c_2 + b_3}{2}, & m = \dfrac{a_3 + b_1}{2}, & n = \dfrac{b_1 + c_3}{2}, \\ p = \dfrac{c_2 - b_3}{2}, & q = \dfrac{a_3 - b_1}{2}, & r = \dfrac{b_1 - c_3}{2}. \end{array}\right\} \quad (1)'$$

Con ciò:

$$\begin{aligned} \xi &= (a\,x + n\,y + m\,z) + (q\,z - r\,y) \\ \eta &= (n\,x + b\,y + l\,z) + (r\,x - p\,z) \\ \zeta &= (m\,x + l\,y + c\,z) + (p\,y - q\,x); \end{aligned}$$

donde apparisce che lo spostamento generale in discorso è composto dei due particolari le cui componenti sono le espressioni fra parentesi in colonna.

Il primo è lo spostamento simmetrico precedentemente considerato.

Il secondo è definito dall'essere lo spostamento d'ogni punto (x, y, z) il momento del vettore applicato definito dal vettore $(-p, -q, -r)$ e dallo stesso punto (x, y, z), rispetto all'origine come polo. Per modo che lo spostamento risulta nullo pei punti la cui posizione iniziale è sulla retta parallela a quel vet-

tore passante per l'origine, la quale, con un certo senso da prestabilirsi, si chiamerà l' " asse ": e per ogni altro punto, di grandezza eguale al prodotto delle grandezze del vettore e della mutua distanza del posto iniziale e dell'asse, perpendicolare al piano dei medesimi, volto in tal senso che il giro d'un semipiano terminato all'asse che, per l'angolo minore di un retto, passa dal posto iniziale al finale è, rispetto al vettore (p, q, r), positivo. Così, il rapporto della grandezza dello spostamento a quella della distanza del posto iniziale dall'asse è costante, e il suddetto angolo ha quel rapporto per tangente; in conseguenza di che riesce parimente costante in grandezza, non altrimenti che in senso.

Chiameremo questo spostamento (del quale è manifesta l'analogia collo spostamento rotatorio) " pseudorotatorio ": e " pseudorotazione " il vettore (p, q, r), coll'aggiunta che il suo asse sia l'asse dello spostamento precedentemente definito, per modo che, stabilito che l'angolo di cui gira il suddetto semipiano abbia misura dello stesso segno del giro corrispondente per rispetto all'asse (cfr. § 83), la misura della pseudorotazione sarà senz'altro la tangente di quest' angolo, per quanto abbiamo visto, costante.

La pseudorotazione e l'asse (o un suo punto) definiscono lo spostamento in discorso; cioè, come il rotatorio, esso è definito da un vettore applicato.

Il coefficiente di dilatazione lineare secondo la direzione dell'asse e la deviazione corrispondente riescono zero: il coefficiente di dilatazione lineare secondo una direzione perpendicolare all'asse, indicando con ϖ la misura della pseudorotazione, $\sqrt{1 + \varpi^2} - 1$, e la deviazione corrispondente $\arctan \varpi$, l'asse essendo orientato come l'asse dello spostamento: il coefficiente di dilatazione cubica, ϖ^2.

Notiamo come questi risultati collimino con quelli del § 95. La (4) di quel § si riduce infatti nel presente caso a:

$$\lambda (\lambda^2 + p^2 + q^2 + r^2) = 0 ;$$

per modo che una sola radice è reale, e questa è zero: cioè esiste una sola retta speciale, e il coefficiente di dilatazione lineare

secondo la sua direzione è nullo; donde segue che lo spostamento d' ogni punto dev' essere in un piano perpendicolare alla retta medesima.

§ 102. — Per (2, § 92) i coefficienti $a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots c_3$ rappresentano numeri il cui valore è indipendente dalla scelta delle unità di misura.

Distingueremo coll' epiteto d' " estremamente piccolo „ uno spostamento dislocatorio semplice omogeneo pel quale questi numeri siano così piccoli da riuscire insensibile una quantità misurata dai loro prodotti e potenze superiori alla prima ai mezzi d'osservazione che rilevano con sicurezza le quantità della stessa specie misurate dalla loro prima potenza.

Indichino α, β, γ i coseni individuanti una certa direzione, λ il coefficiente di dilatazione lineare secondo la direzione medesima, $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$, $\gamma + \Delta\gamma$ i coseni della direzione corrispondente nella posizione finale. Inoltre pongasi, per brevità di scrittura:

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma &= \Lambda_1, \\ b_1 \alpha + b_2 \beta + b_3 \gamma &= \Lambda_2, \\ c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma &= \Lambda_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Per (4, § 93) si avrà sensibilmente, come subito si verifica:

$$\lambda \doteq \Lambda_1 \alpha + \Lambda_2 \beta + \Lambda_3 \gamma \tag{2}$$

$$\Delta\alpha = \Lambda_1 - \lambda\alpha, \qquad \Delta\beta = \Lambda_2 - \lambda\beta, \qquad \Delta\gamma = \Lambda_3 - \lambda\gamma. \tag{3}$$

Si distinguano poi con un apice i simboli delle stesse quantità per un'altra direzione qualsivoglia: rappresenti θ la misura dell'angolo delle due direzioni iniziali, positiva o negativa secondo che è positivo o negativo il giro che conduce da (α, β, γ) a $(\alpha', \beta', \gamma')$ rispetto alla perpendicolare al loro piano nel senso assunto come positivo: finalmente, dinoti $\theta - \Delta\theta$ la misura di questo angolo per le direzioni finali. Da:

$$\cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

segue sensibilmente:

$$\sin\theta\,\Delta\theta = \alpha\,\Delta\alpha' + \beta\,\Delta\beta' + \gamma\,\Delta\gamma' + \alpha'\,\Delta\alpha + \beta'\,\Delta\beta + \gamma'\,\Delta\gamma, \tag{4}$$

che, coll'aiuto delle (3), serve a determinare $\Delta\theta$, ciò che chiamiamo lo " scorrimento dell'asse (α, β, γ) rispetto all'asse $(\alpha', \beta', \gamma')$„.

Le relazioni (2) e (4) nel caso d'uno spostamento pseudorotatorio forniscono $\lambda = 0$, $\Delta\theta = 0$, qualunque siano α, β, γ, α', β', γ', per modo che lo spostamento medesimo si confonde con uno spostamento rotatorio di cui l'asse è lo stesso, e la rotazione, ϖ confondendosi sensibilmente con arctan ϖ, la pseudorotazione.

Le stesse relazioni forniscono poi eguali valori di λ e di $\Delta\theta$, a parità di α, β, γ, α', β', γ', per uno spostamento qualsivoglia della specie considerata e pel corrispondente spostamento simmetrico (§ 97).

Inoltre il determinante (1) del § 94 si riduce a:

$$1 + a_1 + b_2 + c_3 = 1 + a + b + c,$$

per modo che anche il coefficiente di dilatazione cubica risulta pei due spostamenti lo stesso.

Collegando queste proposizioni, concludiamo che " ogni spostamento della specie considerata si compone d'uno spostamento rotatorio coll'asse passante per l'origine, e d'uno spostamento della stessa specie e colla stessa origine, ma simmetrico, avente comune con esso il coefficiente di dilatazione lineare secondo ogni direzione, lo scorrimento d'un asse qualunque rispetto ad un altro, il coefficiente di dilatazione cubica ".

In particolare, facendo nelle (2) successivamente:

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1,$$

e tenendo calcolo delle (1) e (1, § 101), si ottiene:

$$\lambda = a_1 = a, \qquad \lambda = b_2 = b, \qquad \lambda = c_3 = c.$$

E facendo nella (4) successivamente:

$$\beta = 1, \ \gamma' = 1, \qquad \gamma = 1, \ \alpha' = 1, \qquad \alpha = 1, \ \beta' = 1,$$

tenendo calcolo delle (3) e delle relazioni suddette, otteniamo anche rispettivamente:

$$\Delta\theta = c_2 + b_3 = 2\,l,$$
$$\Delta\theta = a_3 + c_1 = 2\,m,$$
$$\Delta\theta = b_1 + a_2 = 2\,n.$$

Dalle quali formole risulta stabilito il significato meccanico dei coefficienti dello spostamento simmetrico, rilevandosene che

a, b, c sono i coefficienti di dilatazione secondo le direzioni degli assi coordinati ai quali i coefficienti si riferiscono, e $2l$, $2m$, $2n$ lo scorrimento dell'asse delle y rispetto all'asse delle z, dell'asse delle z rispetto all'asse delle x, dell'asse delle x rispetto all'asse delle y.

Chiameremo questi coefficienti più particolarmente in questo caso " parametri di dilatazione ". Essi sono i parametri della terna vettoriale delle dilatazioni dello spostamento simmetrico (§ 100), che si dirà senz'altro la terna vettoriale dello spostamento considerato. Notiamo che, per (2), il coefficiente di dilatazione lineare secondo ogni direzione è l'inverso del quadrato del raggio vettore della quadrica parallelo alla direzione medesima (cfr. § 55). Questo quadrato sarà negativo per un fascio di direzioni uscenti dal centro della quadrica nel caso che questa sia un iperboloide d'ambedue le specie, e per tutte, quando sia un ellissoide immaginario. Ma, se in ogni caso s'immagina la superficie formata dalla quadrica della terna vettoriale del supposto spostamento e da quella della terna inversa (§ 54), concepita col centro nello stesso punto, questa superficie sarà incontrata da ogni raggio uscente dal centro in un punto reale (se occorre, all'infinito), la grandezza della cui distanza dal centro medesimo avrà per quadrato l'inverso del coefficiente di dilatazione secondo la direzione del raggio.

Finalmente, essendo $a + b + c$ il coefficiente di λ^2 nello sviluppo del primo membro della (2, § 97), mentre -1 è il coefficiente di λ^3, si ha:

$$a + b + c = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 ;$$

espressione del coefficiente di dilatazione cubica, che si può stabilire direttamente, notando che, nello spostamento simmetrico, ad un parallelepipedo coi lati paralleli alle rette speciali nella posizione iniziale corrisponderà nella posizione finale un parallelepipedo coi lati paralleli alle stesse rette, e il rapporto del volume del secondo a quello del primo sarà:

$$(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) ;$$

ossia, trascurando i termini insensibili:

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 .$$

La rotazione e l'asse del componente rotatorio, e la terna vettoriale delle dilatazioni del componente simmetrico si sogliono chiamare gli stessi elementi dello spostamento estremamente piccolo considerato.

§ 103. — Notiamo infine che, posto

$$2\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,lyz + 2\,m\,zx + 2\,n\,xy,$$

le componenti dello spostamento del punto di cui (x, y, z) è il posto iniziale, sono, nell'ipotesi dello spostamento simmetrico:

$$\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz};$$

per modo che esiste in questa ipotesi la " funzione degli spostamenti " (cfr. § 62), che non è altro che φ.

L'equazione

$$2\varphi = 1$$

è quella della quadrica della terna vettoriale delle dilatazioni, e

$$\varphi = \mathit{Costante},$$

quella della famiglia delle quadriche omotetiche ad essa e alla quadrica della terna vettoriale invertita. Queste sono per conseguenza le superficie di livello (§ 76), aventi la proprietà, fra l'altre, che la normale in ogni loro punto ha la direzione dello spostamento del punto di cui quello è il posto iniziale.

Tutto ciò sta in generale. Abbiamo poi veduto, nell'ipotesi dello spostamento estremamente piccolo, l'altra notevole proprietà della suddetta doppia quadrica; la quale fornisce così una semplice rappresentazione grafica delle principali circostanze dello spostamento medesimo *.

---

* Vedasi per altre e più complete trattazioni di questo e degli affini argomenti:

Thomson e *Tait* — *Treatise on Natural Philosophy.* — Cambridge, 1883 — §§ 155 e segg.

Kirchhoff — *Mechanik* — 10te *Vorles.*

Beltrami — *Ricerche sulla cinematica dei fluidi.* — Bologna.

Spostamento continuo. Spostamento continuo regolare.

§ 104. — " Continuo „ chiamiamo lo spostamento d'un sistema, quando, supposto il sistema nella posizione iniziale continuo, lo spostamento d'ogni punto è funzione continua e finita del posto iniziale; ossia, assunti i soliti assi cartesiani — per modo che, coll'ipotesi che il sistema nella posizione iniziale sia continuo, le coordinate dei posti iniziali formano un campo continuo — quando le componenti dello spostamento d'ogni punto sono funzioni continue e finite delle coordinate del posto iniziale.

Di qui segue immediatamente che il sistema sarà continuo anche nella posizione finale: e che a posizioni iniziali formanti una linea, una superficie, un corpo chiuso da una superficie, corrisponderanno posizioni finali formanti egualmente una linea, o una superficie, o il corpo chiuso dalla superficie corrispondente.

§ 105. — Chiamiamo poi " regolare „ uno spostamento continuo, quando le componenti dello spostamento, e per conseguenza le coordinate finali, d'ogni punto ammettono anche le derivate rispetto alle singole coordinate iniziali continue e finite; colla condizione che il determinante funzionale delle coordinate finali rispetto alle iniziali sia, per ogni punto, diverso da zero; cioè, indicando con $x, y, z,$ x', y', z' e ξ, η, ζ le coordinate iniziali e finali e le componenti dello spostamento di un punto qualunque, e posto:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{dx'}{dx} & \frac{dx'}{dy} & \frac{dx'}{dz} \\ \frac{dy'}{dx} & \frac{dy'}{dy} & \frac{dy'}{dz} \\ \frac{dz'}{dx} & \frac{dz'}{dy} & \frac{dz'}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} & \frac{d\xi}{dz} \\ \frac{d\eta}{dx} & 1 + \frac{d\eta}{dy} & \frac{d\eta}{dz} \\ \frac{d\zeta}{dx} & \frac{d\zeta}{dy} & 1 + \frac{d\zeta}{dz} \end{vmatrix},$$

D diverso da zero, qualunque siano x, y, z.

§ 106. — Scelto un punto del sistema, di cui il posto iniziale e lo spostamento siano (x, y, z), e (ξ, η, ζ), il posto iniziale e lo spostamento di un altro punto qualunque si potranno indi-

care con $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ e $(\xi + \Delta \xi, \eta + \Delta \eta, \zeta + \Delta \zeta)$, e sarà:

$$\Delta \xi = d\xi + \varepsilon_x, \; \Delta \eta = d\eta + \varepsilon_y, \; \Delta \zeta = d\zeta + \varepsilon_z, \qquad (1)$$

ove:

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{d\xi}{dx}\Delta x + \frac{d\xi}{dv}\Delta y + \frac{d\xi}{dz}\Delta z \\ d\eta &= \frac{d\eta}{dx}\Delta x + \frac{d\eta}{dy}\Delta y + \frac{d\eta}{dz}\Delta z \\ d\zeta &= \frac{d\zeta}{dx}\Delta x + \frac{d\zeta}{dy}\Delta y + \frac{d\zeta}{dz}\Delta z, \end{aligned} \qquad (2)$$

e, collo svanire di $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$,

$$\lim \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = 0. \qquad (3)$$

Ne viene che lo spostamento del sistema è composto dello spostamento traslatorio la cui traslazione è (ξ, η, ζ): dello spostamento dislocatorio semplice omogeneo di cui l'origine è il punto (x, y, z), e i coefficienti sono:

$$\frac{d\xi}{dx}, \; \frac{d\xi}{dy}, \; \frac{d\xi}{dz}, \; \frac{d\eta}{dx}, \; \ldots \; \frac{d\zeta}{dz}:$$

finalmente dello spostamento tale che pel punto il cui posto iniziale è $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ lo spostamento è $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$.

Intorno a quest'ultimo spostamento è importante notare che la (3) significa che, fissato ε a piacere, vi sarà ρ tale che, con $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} < \rho$, è:

$$\frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} < \varepsilon:$$

e cioè che, pur di considerare una parte del sistema allo stato iniziale comprendente il posto (x, y, z) racchiudibile entro una sfera di raggio sufficientemente piccolo, la grandezza dello spostamento $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ d'ogni punto il cui posto iniziale appartiene a quella parte sarà una frazione della distanza del posto da (x, y, z) minore di un numero positivo prefissato piccolo finchè si vuole.

Per conseguenza, se ammettiamo che un mezzo d'osservazione non possa rilevare ad un tempo un segmento e una frazione di esso inferiore a $\frac{1}{q}$, pur di supporre il punto P' entro una sfera di centro P o (x, y, z) e raggio ρ tale che con $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} < \rho$ è:

$$|\varepsilon_i| < \frac{1}{q}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

il mezzo d'osservazione, che vedrà i due punti distinti l'uno dall'altro, non apprezzerà lo spostamento $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$. In altre parole, pur di prendere una parte del sistema, comprendente il punto il cui posto iniziale è (x, y, z), sufficientemente piccola, riuscirà insensibile lo spostamento $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ d'ogni suo punto, che pure il mezzo d'osservazione percepisce distinto dal punto suddetto.

Questo è tutto ciò che si può dire in generale intorno al componente in discorso. Ma ne viene che, se il corpo s'immagina decomposto in tante parti, comprendenti altrettanti punti opportunamente scelti, per ridurre la determinazione del suo spostamento a quello dello spostamento delle singole parti, pur di prendere queste parti abbastanza piccole, lo spostamento di ciascuna sarà sensibilmente composto d'uno spostamento traslatorio, la cui traslazione è lo spostamento del relativo punto, e d'uno spostamento dislocatorio semplice omogeneo coll'origine in questo punto.

§ 107. — Fissato il posto (x, y, z) del corpo allo stato iniziale che determina un certo punto del corpo medesimo, lo spostamento traslatorio e dislocatorio suddetti risultano senz'altro determinati, e ogni elemento che vi si riferisce si chiama lo stesso elemento " nel punto " in discorso. Così vien definito per ogni punto la traslazione, il coefficiente di dilatazione lineare e la deviazione secondo le singole direzioni, il coefficiente di dilatazione cubica.

A chiarire il significato degli elementi così definiti gioveranno le considerazioni seguenti.

Il coefficiente di dilatazione lineare secondo la direzione

($\pm \alpha$, $\pm \beta$, $\pm \gamma$) nel punto (x, y, z), risulta, per la posta definizione, conformemente alle (4, § 93):

$$\sqrt{\left(\left(\frac{d\xi}{dx}+1\right)\alpha+\frac{d\xi}{dy}\beta+\frac{d\xi}{dz}\gamma\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dx}\alpha+\left(\frac{d\eta}{dy}+1\right)\beta+\ldots\right)^2+\ldots}-1$$

Ora questo radicale, supposto:

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\alpha$$

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\beta$$

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\gamma,$$

non è altro che il limite collo svanire di $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ del rapporto della distanza finale dei punti i cui posti iniziali sono (x, y, z) e ($x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$) alla distanza iniziale $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$: come agevolmente si trova calcolando la prima distanza mediante (1) e (2) del § precedente, e il limite del rapporto in base a (3) del § stesso.

Analogamente, il coefficiente di dilatazione cubica nello stesso punto (x, y, z) sarà per definizione, secondo il § 94, $|D|-1$, dove D indica il determinante del § 105.

E se, valendosi di (1) e (2) del suddetto §, si determina il rapporto del volume del tetraedro avente per vertici le posizioni finali dei punti i cui posti iniziali sono (x, y, z) e altri tre qualsivogliano al volume del tetraedro avente per vertici questi posti: e poi, in base a (3), il limite di questo rapporto collo svanire delle distanze fra (x, y, z) e gli altri tre vertici, si troverà facilmente $|D|$. Donde segue che $|D|$ è il limite analogo del volume della figura corrispondente al tetraedro iniziale al volume del tetraedro medesimo; perchè 1 sarà il limite del rapporto dei volumi di detta figura e del tetraedro avente per vertici i posti finali.

§ 108. — Particolarmente interessante è il caso che lo spostamento dislocatorio omogeneo corrispondente ai singoli punti sia estremamente piccolo (§ 102), nel quale il componente pseu-

dorotatorio si riduce ad uno spostamento rotatorio coll'asse passante pel punto.

Vi è, in tal caso, per ogni punto di cui (x, y, z) e (ξ, η, ζ) sono il posto iniziale e lo spostamento, oltre la traslazione (ξ, η, ζ), come nel caso generale, la rotazione di cui le componenti sono:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right),$$
$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right),$$
$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right),$$

detta la " rotazione nel punto „ e la terna vettoriale delle dilatazioni di cui i parametri sono:

$$a = \frac{d\xi}{dx}, \qquad b = \frac{d\eta}{dy}, \qquad c = \frac{d\zeta}{dz}$$
$$l = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right),$$
$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right),$$
$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\right);$$

" terna vettoriale delle dilatazioni „ e " parametri di dilatazione „ l'una e gli altri " nel punto „ (cfr. § 101).

CAPITOLO II.

MOVIMENTO.

Determinazione del tempo.

§ 109. — Il " tempo „ che un fenomeno impiega a compiersi, o la sua " durata „, si ammette proporzionale all'angolo di cui gira il globo terrestre fra il principio e la fine del fenomeno; e ciò posto l' " unità di tempo „ sarà il tempo che impiega il globo a girare di un angolo determinato, e la grandezza d'ogni tempo,

quella dell'angolo di cui nel suo corso gira il globo, assunto il suddetto angolo per unità.

Il tempo che decorre fra due istanti si chiama l' " intervallo di tempo „ compreso fra i due istanti; e chiamato l'uno " origine „ e l'altro " termine „ dell'intervallo, si assegna all'intervallo misura positiva o negativa secondo che l'origine precede o segue il termine.

Così, fissato un certo istante come origine d'ogni intervallo, ogni altro istante sarà determinato dall'intervallo di tempo di cui è termine, e indicando con t la misura di questo intervallo, si dirà corrispondente alla fine del tempo t, o al tempo t; conformemente a che, un fatto che avviene a quell' istante, si dirà avvenire " alla fine del tempo t „ o " al tempo t „.

Movimento di un punto.

§ 110. — Il movimento di un punto in un intervallo di tempo è dato dalla successione delle sue posizioni ai singoli istanti dell'intervallo; o da una posizione fissa, che potrà essere la posizione ad un istante, e dalla successione degli spostamenti corrispondenti al passaggio da essa alla posizione ad ogni istante. La posizione fissa si chiamerà talvolta la " posizione di riferimento del punto „.

La dipendenza fra la posizione o lo spostamento relativo ad ogni istante e questo istante definisce ogni particolare movimento.

Per tradurre la proprietà della continuità del movimento (§ 2), questa dipendenza è sempre supposta tale che la posizione o lo spostamento ad ogni istante siano funzioni continue del tempo che determina l'istante medesimo.

Di più si ammette che le coordinate individuanti la posizione e le componenti dello spostamento ammettano il coefficiente differenziale al tempo, finito e continuo, di qualunque ordine che occorre di rispetto considerare.

§ 111. — Siano x, y, z le coordinate del punto mobile al tempo qualunque t, con t compreso fra t_1 e t_2. Il movimento del punto sarà dato da:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t), \tag{1}$$

quando $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ siano funzioni note di t nell'intervallo $(t_1\ t_2)$.

Concependo eliminato t fra le (1) si ottengono due equazioni:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

che sono quelle della linea luogo di tutti i posti occupati dal punto mobile nell'intervallo di tempo considerato. Questa linea si chiama la " trajettoria „ del punto.

Il senso in cui, cominciando dal posto occupato ad un istante, si succedono i posti occupati negli istanti successivi a quello in un intervallo di tempo piccolo finchè si vuole, si dice il " senso del movimento del punto a quell'istante „.

Indichi s la misura dell'arco di trajettoria avente per origine e per termine il posto occupato dal punto mobile rispettivamente al tempo t_0 e t. Sarà:

$$s = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \chi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \tag{3}$$

dove $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$, $\psi'(t)$ indicano il coefficiente differenziale rispetto a t, e stabilito che il radicale rappresenti il valor assoluto, va scelto il segno in modo che quello di s risulti come conviene. Questa relazione si chiama l' " equazione del movimento sulla trajettoria „.

Le equazioni (2) e (3) sono pure sufficienti per determinare il movimento del punto.

Supposto, in un intervallo di tempo, costante il senso del movimento, il tempo che impiega il punto mobile a passare da un punto ad un altro della trajettoria si dice l'intervallo di tempo che impiega a descrivere l'arco terminato agli stessi punti, nell'intervallo totale considerato.

§ 112. — Il movimento d'un punto, quando la trajettoria è una retta, si dice " rettilineo „.

§ 113. — " Uniforme „ si dice il movimento d'un punto quando il senso è invariabile, e il tempo impiegato a descrivere un arco qualsivoglia di trajettoria, proporzionale alla lunghezza dell'arco. Il rapporto costante della misura di quell'intervallo di tempo a quella dell'arco si chiama la " misura della velocità del

movimento „; e chiaramente sarà positivo o negativo secondo che il senso in cui, partendo dall'origine, cresce la misura dell'arco, concorda o no con quello del movimento (§ 111).

§ 114. — Ne viene che il movimento uniforme rettilineo, indicando con α, β, γ i coseni di direzione della trajettoria volta nel senso che assumiamo come positivo, e con a la misura della velocità, sarà definito da:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}, \\ \pm\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = a(t - t_0), \end{array}\right\} \quad (1)$$

dove, secondo che a è positivo o negativo, si deve premettere al radicale lo stesso segno di $t - t_0$ o l'opposto.

Donde segue:

$$x = x_0 + a\alpha(t - t_0),$$
$$y = y_0 + a\beta(t - t_0),$$
$$z = z_0 + a\gamma(t - t_0);$$

ossia, coi valori delle costanti che subito risultano:

$$x = a_1 + a_2 t, \qquad y = b_1 + b_2 t, \qquad z = c_1 + c_2 t;$$

che sono le (1) del § 111 pel caso in discorso.

Reciprocamente, da queste equazioni scaturiscono le due prececenti; per modo che il movimento rettilineo uniforme è anche quello, se vogliamo, pel quale le coordinate del punto, o le componenti dello spostamento corrispondente al passaggio da una posizione fissa a quella relativa ad un istante qualsivoglia, sono funzioni lineari del tempo che determina questo istante.

§ 115. — Movimento d'un punto " composto „ o " risultante „ di più altri si dice quello per cui lo spostamento del punto corrispondente al passaggio da un posto fisso alla posizione al tempo qualsivoglia è composto degli spostamenti analoghi relativi agli altri movimenti, cioè degli spostamenti corrispondenti al passaggio da quel posto fisso alla posizione al supposto istante, competente ai singoli movimenti. Si riconosce che, in conseguenza di ciò, lo spostamento corrispondente al passaggio dalla posizione ad un istante alla posizione ad un altro istante, l'uno e l'altro

quali si vogliano, è pel movimento composto il risultante di quelli che competono ai singoli movimenti componenti.

Osservazione. Non è superfluo notare che, dati *a priori* due movimenti, mutando il punto di riferimento, rispetto al quale si definiscono i relativi spostamenti, si ottiene anche un movimento composto generalmente diverso, il quale al precedente si riduce con uno spostamento dei posti corrispondenti ai singoli istanti eguale allo spostamento che ha per origine e termine la prima e la seconda posizione di riferimento.

Infatti, assunta la solita terna d'assi coordinati, rispetto alla quale x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 siano le coordinate del posto al tempo t, nel primo e nel secondo movimento, se si prendono per posizione di riferimento, una volta l'origine, e un'altra il punto (α, β, γ), gli spostamenti al tempo t saranno in un caso (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), e nell'altro $(x_1 - \alpha,\ y_1 - \beta,\ z_1 - \gamma)$ e $(x_2 - \alpha,\ y_2 - \beta,\ z_2 - \gamma)$; per modo che il posto al tempo t nel movimento risultante sarà nel primo caso $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$, e nel secondo $(x_1 + x_2 - \alpha,\ y_1 + y_2 - \beta,\ z_1 + z_2 - \gamma)$.

§ 116. *Esempio.* — Il movimento tale che, indicando con x, y, z le coordinate del punto al tempo t, è:

$$x = \Sigma x_i, \qquad y = \Sigma y_i, \qquad z = \Sigma z_i,$$

è composto dei movimenti, pei quali al tempo t le coordinate del punto sono $x_1, y_1, z_1,\ \ x_2, y_2, z_2, \ldots$

§ 117. *Esempio.* — Movimento composto dei due, tali che per l'uno è:

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t, \qquad z = c + \gamma t,$$

e per l'altro è:

$$x = a' + \alpha' t, \qquad y = b' + \beta' t, \qquad z = c' + \gamma' t,$$

è il movimento tale che:

$$x = a + a' + (\alpha + \alpha') t,$$
$$y = b + b' + (\beta + \beta') t,$$
$$z = c + c' + (\gamma + \gamma') t.$$

Quindi ogni movimento composto di due movimenti rettilinei uniformi è parimente rettilineo uniforme; che se per un punto si

concepiscono descritte le parallele alle trajettorie dei due movimenti componenti, e segnati sopra di esse, coll'origine nel punto e il termine dalla parte donde volge il senso del movimento rispettivo, un segmento di grandezza eguale alla grandezza della velocità, la diagonale del parallelogrammo contenuto dai due segmenti, spiccata dal punto, fornirà la direzione della trajettoria, il senso, e la grandezza della velocità del movimento composto.

Movimento d'un sistema.

§ 118. — Il movimento d'un sistema in un intervallo di tempo è dato dalla successione delle sue posizioni ai singoli istanti dell'intervallo; o da una posizione fissa, che potrà essere, per esempio, la sua posizione ad un certo istante, e dallo spostamento corrispondente al passaggio da essa alla posizione ad un istante qualsivoglia. La posizione fissa si chiamerà anche la " posizione di riferimento del sistema ".

Ogni relazione fra la posizione ad un istante qualunque, o lo spostamento corrispondente, e il tempo che determina l'istante definisce un particolar movimento del sistema.

Così, il movimento d'un sistema è dato e definito da quello d'ogni suo punto. Però quando, come nel caso del sistema rigido, basta per fissare la posizione del sistema un certo numero di elementi, il valore di questi elementi ad ogni istante, che stabilirà una certa relazione fra essi e il tempo, sarà sufficiente per determinare e definire il movimento medesimo.

§ 119. — Il movimento d'un sistema è " composto " o " risultante " di due o più altri, quando lo spostamento del sistema corrispondente al passaggio da una posizione fissa alla posizione all'istante qualunque competente al movimento considerato è composto degli spostamenti corrispondenti al passaggio dalla stessa posizione fissa alla posizione al supposto istante competente ai singoli altri movimenti; per modo che il movimento d'ogni suo punto è composto o risultante dei movimenti corrispondenti a quelli (§ 115).

Movimento traslatorio.

§ 120. — “ Movimento traslatorio „ o “ di traslazione „ d’un sistema è quello pel quale lo spostamento corrispondente al passaggio da una posizione fissa a quella relativa ad un istante qualsivoglia è uno spostamento traslatorio (§ 82); donde segue che lo spostamento corrispondente al passaggio dalla posizione ad un istante a quella ad un altro qualunque sarà traslatorio.

Si vede che, in virtù di questo movimento, le trajettorie di tutti i punti hanno egualmente orientata la tangente nel posto occupato dal relativo punto ad uno stesso istante, volta nel senso del movimento, ed eguale l’arco descritto fra gli stessi istanti dal punto medesimo; per modo che sono eguali ed egualmente orientate, e regge per ogni punto la stessa legge del movimento sulla trajettoria.

La posizione ad un certo istante e la traslazione ad un tempo qualsivoglia determinano il movimento di traslazione.

Movimento rotatorio.

§ 121. — “ Movimento rotatorio „ o “ di rotazione „ d’ un sistema è quello pel quale lo spostamento corrispondente al passaggio da una posizione fissa alla posizione ad un istante qualsivoglia è uno spostamento rotatorio (§ 83) *con asse invariabile.*

È chiaro che con ciò i punti descrivono archi di cerchio aventi il centro sull’ asse, in piani perpendicolari all’ asse, di lunghezza proporzionale al raggio, in senso ad ogni istante concorde. In altre parole, il sistema *gira* intorno all’asse.

L’ angolo di rotazione dello spostamento (§ 83) corrispondente al passaggio dalla posizione di riferimento alla posizione relativa ad un istante qualunque — del quale s’ intende preso ad un istante un valore a piacere, e in ogni altro quello che gli succede con continuità al variare del tempo — si chiama l’ “ angolo di rotazione „ del sistema all’istante considerato.

Rammentiamo che la misura di quest'angolo sarà positiva o negativa secondo che corrisponde ad un giro positivo o negativo per rispetto all'asse (§ 83). Quindi, se φ e $\varphi + \Delta\varphi$ sono le misure dell'angolo di rotazione ai tempi t e $t + \Delta t$, con $\Delta t > 0$, e il sistema gira costantemente nello stesso senso, sarà $\Delta\varphi$ positivo o negativo secondo che questo senso per rispetto all'asse è positivo o negativo.

Il senso in cui gira il sistema, partendo da un istante, in un intervallo *susseguente* piccolo finchè si vuole si chiama il senso del movimento rotatorio all'istante considerato.

§ 122. — Un movimento rotatorio nel quale è invariabile il senso, e il tempo impiegato dal sistema a girare di un angolo qualsivoglia, proporzionale a questo angolo, si dice " uniforme ". E il rapporto della misura degli incrementi dell'angolo di rotazione a quella dei corrispondenti intervalli di tempo si chiama la " misura della velocità angolare "; la quale risulta positiva o negativa secondo che è positivo o negativo il senso del movimento rispetto all'asse.

Movimento polare.

§ 123. — " Movimento polare " d'un sistema chiameremo quello per cui lo spostamento corrispondente al passaggio da una posizione fissa alla posizione ad un istante qualsivoglia è uno spostamento rotatorio *il cui asse passa per un punto invariabile*, che si dirà il " polo ". Diremo poi rotazione e asse del movimento polare relativi alla supposta posizione di riferimento, ad ogni istante, quelli dello spostamento all'istante medesimo.

Movimento rigido.

§ 124. — Movimento rigido è ognuno di quelli per cui (come nei precedenti casi) lo spostamento corrispondente al passaggio da una posizione fissa alla posizione ad un istante qualsivoglia è uno spostamento rigido.

Per quanto s'è veduto (§ 87), ogni movimento rigido si può concepire composto d'un movimento traslatorio la cui tras-

lazione ad ogni istante (partendo dalla posizione di riferimento) è lo spostamento (dalla corrispondente posizione) di un punto del sistema, o invariabilmente unito al sistema, scelto a piacere, e d'un movimento polare il cui polo è questo punto, e la rotazione relativa alla supposta posizione di riferimento ad ogni istante è indipendente dalla scelta del punto medesimo.

§ 125. — Quando la rotazione ai singoli istanti abbia direzione costante il componente polare diventa un movimento rotatorio, il movimento del cui asse, in quello del sistema, è il componente traslatorio corrispondente. L'asse mobile così definito si chiama anche l'asse del movimento considerato.

Questo è assai prossimamente il caso del globo terrestre, il cui movimento nel sistema solare si può sensibilmente concepire come composto di un movimento traslatorio pel quale il centro descrive progressivamente, con una certa legge, un'ellisse avente per uno dei fuochi il centro del sole, e d'un movimento rotatorio uniforme, di cui la grandezza della velocità angolare è di quattro retti in ventiquattr'ore (di tempo sidereo), il senso è rispetto all'asse volto da sud a nord quello che ordinariamente si assume per positivo (§ 10), e l'asse forma l'angolo di $23^\circ \frac{1}{2}$ colla perpendicolare al piano della trajettoria del centro, volta nello stesso senso rispetto a quello in cui la trajettoria è descritta, e giace nel semipiano terminato a quella perpendicolare che forma col semipiano analogo parallelo all'asse maggiore dell'ellisse, volto dalla parte del perielio, un angolo da 10° a 11°, dalla parte del punto equinoziale d'autunno. L'orientazione del globo intorno a questa retta nel movimento di traslazione, e l'angolo di rotazione ad ogni istante nel movimento rotatorio dipendono naturalmente dalla scelta della posizione di riferimento. L'asse in discorso è ciò che comunemente si chiama " asse di rotazione del globo „ o " asse terrestre „.

§ 126. — Nel caso più particolare che l'asse del componente rotatorio sia fisso e la traslazione del componente traslatorio corrispondente ad esso costantemente parallela, il movimento si dice " elicoidale „. Tale è il movimento della vite nella madrevite, donde il nome (ἕλιξ = vite).

Movimento continuo regolare.

§ 127. — " Movimento continuo regolare „ chiamiamo quello per cui lo spostamento corrispondente al passaggio dalla posizione ad un istante *scelto a piacere*, alla posizione ad un altro istante qualsivoglia dell'intervallo considerato è uno spostamento continuo regolare (§ 105), coll'aggiunta che la derivata rispetto al tempo, d'ogni ordine che occorre considerare, delle coordinate dei singoli punti, ad ogni istante, è funzione continua e finita del posto, iniziale o attuale, dotata di derivate rispetto alle coordinate dello stesso posto egualmente continue e finite. Più in particolare, quando lo spostamento è dislocatorio semplice, chiameremo il movimento parimente " dislocatorio semplice „.

Le proprietà fondamentali di questi movimenti scaturiscono da quelle dei relativi spostamenti, che abbiamo a suo luogo indagato. Notiamo quella che i punti del mobile, che ad un istante formano una linea, una superficie, o la parte racchiusa da una superficie, formeranno parimente ad ogni istante una linea, una superficie, o la parte chiusa dalla superficie corrispondente, che si dirà la parte corrispondente, o la stessa parte del mobile nella posizione relativa al supposto istante. Che se il movimento è dislocatorio semplice, si conserverà l'ordine della linea e della superficie, e rette e piani paralleli ad un istante lo saranno ad ogn' altro.

§ 128. — In particolare, ogni parte continua del contorno del mobile sarà costantemente formata dagli stessi punti, nelle varie posizioni che occupano ai singoli istanti. Quindi, se, assunta una terna d'assi coordinati, è:

$$E(\xi, \eta, \zeta, t) = 0$$

l'equazione d'una parte continua del contorno (se occorre del contorno completo), e x, y, z rappresentano le coordinate al tempo t del punto di cui le coordinate al tempo zero sono x_0, y_0, z_0, quando sia:

$$E(x_0, y_0, z_0, 0) = 0,$$

sarà, per ogni valore di t:

$$E(x, y, z, t) = 0.$$

E reciprocamente; per modo che, concependo nel primo membro di quest'ultima equazione poste per x, y, z le loro espressioni in termini di x_0, y_0, z_0, t, si deve ottenere una certa funzione delle sole x_0, y_0, z_0. Ciò che costituisce per quelle funzioni una condizione così detta " di spazio ", perchè si verifica ad ogni tempo pei punti che occupano, ad un istante, un certo spazio.

§ 129. — Tutti gli elementi del movimento continuo regolare, che risultano definiti, saranno funzioni continue del tempo; in particolare, il determinante funzionale D (§§ 93, 105); che, se per posizione iniziale si assume quella del sistema al tempo zero, e, come precedentemente, si indicano con (x_0, y_0, z_0) e (x, y, z) i posti del punto qualunque ai tempi zero e t, si avrà:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_0} & \frac{dx}{dy_0} & \frac{dx}{dz_0} \\ \frac{dy}{dx_0} & \frac{dy}{dy_0} & \frac{dy}{dz_0} \\ \frac{dz}{dx_0} & \frac{dz}{dy_0} & \frac{dz}{dz_0} \end{vmatrix}.$$

E allora, poichè per $t = 0$ risulta $D = 1$, e D non può ricevere il valor zero (§ 105), sarà D costantemente positivo, cioè $D = |D|$ (cfr. § 94 e § 127).

Movimento relativo.

§ 130. — Siano x, y, z le coordinate d'un punto in movimento, al tempo t, rispetto ad una terna d'assi coordinati, che chiameremo " assi fissi ", e $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ rispetto ad una terna mobile relativamente alla prima, che diremo " assi mobili ". Indichino α, β, γ le coordinate dell'origine, e $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ i coseni di direzione degli assi della seconda terna rispetto alla prima al tempo t. Sarà (§ 21):

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x} + \alpha_2 \mathfrak{y} + \alpha_3 \mathfrak{z}, \\ y &= \beta + \beta_1 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \beta_3 \mathfrak{z}, \\ z &= \gamma + \gamma_1 \mathfrak{x} + \gamma_2 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Immaginiamo anche una terza terna d'assi coordinati, fissa in una posizione qualsivoglia, e per ogni valore di t il punto che ha rispetto ad essa le coordinate $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Il movimento di questo punto si dice il movimento del punto considerato relativo agli assi mobili considerati come fissi in quella posizione.

La posizione in discorso potrà essere quella degli assi mobili ad un istante. In tal caso, se la questione è tale che non importi distinguere l'istante medesimo, gioverà dire movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi, senz'altro.

§ 131. — Poniamo:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 \mathfrak{x} + \alpha_2 \mathfrak{y} + \alpha_3 \mathfrak{z} \\ \eta &= \beta_1 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \beta_3 \mathfrak{z} \\ \zeta &= \gamma_1 \mathfrak{x} + \gamma_2 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z}, \end{aligned} \tag{1}$$

per modo che, per le (1) del § precedente:

$$x = \alpha + \xi, \qquad y = \beta + \eta, \qquad z = \gamma + \zeta.$$

Ne viene (§ 115) che il movimento del punto rispetto agli assi fissi è composto dei due pei quali le coordinate al tempo t sono α, β, γ e ξ, η, ζ rispettivamente; e perciò il primo non è altro che il movimento dell'origine degli assi mobili.

Supponiamo che il movimento degli assi mobili sia traslatorio; e cioè α_i, β_i, γ_i costanti. Allora per (1) il secondo movimento è quello del punto relativo agli assi mobili considerati come fissi nella posizione degli assi aventi la loro orientazione e l'origine degli assi fissi.

Reciprocamente, ogniqualvolta il movimento di un punto si concepisca composto di due altri, si potrà intendere uno dei due movimenti come quello del punto relativo ad una terna d'assi mobili d'orientazione costante, considerati come fissi nella posizione d'una terna parallela, coll'origine nel punto di riferimento, e l'altro come quello dell'origine della terna degli assi mobili medesimi.

§ 132. — Movimento d'un sistema relativo ad una terna di assi mobili considerati come fissi in una posizione è quello pel quale il movimento d'ogni punto del sistema è il corrispondente movimento relativo.

Per quanto precede, quando il movimento d'un sistema si concepisce composto d'un movimento traslatorio e d'un altro qualsiasi, quest'altro si potrà immaginare come il movimento del sistema relativo ad una terna d'assi dotata del moto componente traslatorio, considerata come fissa nella posizione di riferimento che le si assegna.

Sappiamo che ogni movimento rigido si può concepire come composto di un movimento traslatorio, determinato da un punto del mobile scelto a piacere, e da un movimento polare avente quel punto per polo. Così, questo secondo movimento altro non è che il movimento del sistema relativo ad una terna d'assi di orientazione costante coll'origine nel punto in discorso, considerata come fissa nella posizione di riferimento.

§ 133. — Siccome l'ipotesi di segnali fissi è puramente ideale, e noi sogliamo riferire le successive posizioni di un punto mobile a segnali pur mobili, prescindendo dal loro movimento, il movimento dei corpi quale abitualmente lo percepiamo, quale lo determiniamo, è il loro movimento per rispetto ad assi mobili considerati come fissi.

In particolare sogliamo riferire le successive posizioni d'un punto mobile presso la superficie terrestre a segnali fissi al globo terrestre, e partecipanti per conseguenza al suo movimento, prescindendo dal movimento medesimo. E per conseguenza il movimento dei corpi alla superficie della Terra, quale lo percepiamo, è il movimento relativo dei corpi stessi ad una terna d'assi invariabilmente connessa al globo, considerata come fissa.

Noto il movimento del globo per rispetto ad una terna d'assi fissa al sistema solare, che possiamo chiamare movimento annuo-diurno, e cioè il corrispondente movimento d'una terna d'assi fissa al globo, le (1, § 130) stabiliscono la relazione fra il movimento d'un punto qual'è per rispetto ai suddetti assi e quale si percepisce non avvertendo il movimento annuo-diurno.

§ 134. — Per questa applicazione alla Terra è specialmente interessante il caso che il movimento degli assi mobili sia composto d'un movimento traslatorio e d'un movimento rotatorio uniforme (§ 125). In tal caso assumasi per asse mobile delle ζ

l'asse di rotazione, il cui movimento è il componente traslatorio, e indichino α, β, γ le coordinate, per rispetto agli assi fissi delle x, y, z, di quel suo punto che è preso per origine, alla fine del tempo t.

Si supponga l'asse fisso delle z orientato come lo stesso asse, e indichi a l'angolo che l'asse mobile delle $\mathfrak{x}$ forma coll'asse fisso delle x al tempo $t = 0$. Finalmente dinoti ω la misura della velocità angolare. Si ha per (I, § 130):

$$x = \alpha + \mathfrak{x} \cos(\omega t + a) - \mathfrak{y} \sin(\omega t + a)$$
$$y = \beta + \mathfrak{x} \sin(\omega t + a) + \mathfrak{y} \cos(\omega t + a)$$
$$z = \gamma + \mathfrak{z}\,.$$

E di qui:

$$\mathfrak{x} = \quad (x - \alpha) \cos(\omega t + a) + (y - \beta) \sin(\omega t + a)$$
$$\mathfrak{y} = -(x - \alpha) \sin(\omega t + a) + (y - \beta) \cos(\omega t + a)$$
$$\mathfrak{z} = \quad z - \gamma\,.$$

Esempio. — Sia $\alpha = \beta = \gamma = 0$, cioè l'asse delle $\mathfrak{z}$ fisso, e $x = x_0$, $y = y_0$, per modo che la traiettoria del punto nel suo movimento per rispetto agli assi fissi, una retta parallela a detto asse.

Poniamo:

$$\mathfrak{x} = \rho \cos\theta, \qquad \mathfrak{y} = \rho \sin\theta,$$

e indichiamo con ρ_0, θ_0 i valori di ρ e θ per $t = 0$, donde:

$$x_0 = \rho_0 \cos(\theta_0 + a), \qquad y_0 = \rho_0 \sin(\theta_0 + a),$$

per le prime relazioni. Dalle seconde si deduce poi:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = \rho^2 = \rho_0^{\,2}, \qquad \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \tan\theta = \tan(\theta_0 - \omega t).$$

Ne viene:

$$\rho = \rho_0, \qquad \theta = \theta_0 - \omega t\,;$$

le quali mostrano che la trajettoria del punto nel suo movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi sarà un'elica cilindrica, avente per asse l'asse di rotazione, e, rispetto a questo asse, avvolta in senso contrario a quello della rotazione.

CAPITOLO III.

VELOCITÀ.

Velocità di un punto.

§ 135. — Siano t_0, t_1, t_2, ... altrettanti valori della misura del tempo in un intervallo. La posizione di un punto mobile sarà nota a ciascuno dei relativi istanti, supposto che sia nota, ad esempio, per t_0, e si conosca per ogni altro tempo t_i lo spostamento corrispondente al passaggio del punto dalla posizione al tempo t_{i-1} ($i = 1, 2, \ldots$) a quella allo stesso tempo t_i. Giova notare che questo è lo spostamento che si deve comporre collo spostamento relativo al passaggio dalla posizione a t_0 alla posizione a t_{i-1} per avere lo spostamento analogo corrispondente invece a t_i.

Supposto $t_i - t_{i-1} > 0$, il vettore avente l'orientazione dello spostamento in discorso, e per grandezza il rapporto della sua grandezza a $t_i - t_{i-1}$, si chiama la " velocità media " del punto mobile nell'intervallo di tempo che comincia con t_{i-1} e finisce con t_i. Per una precedente definizione (§ 113), la misura di questo vettore riesce appunto la misura della velocità del movimento uniforme pel quale un punto descrive il relativo segmento nell'intervallo di tempo $t_i - t_{i-1}$.

Così, la posizione ad ognuno degli istanti considerati sarà nota, data la posizione ad un istante particolare, e per ogni istante, la velocità media nell'intervallo di tempo che comincia con esso e finisce col successivo, oppure che comincia col precedente e finisce con esso.

§ 136. — Chiamiamo " velocità " del punto all'istante corrispondente alla fine del tempo t il vettore limite collo svanire di Δt, con $\Delta t > 0$, della velocità media del punto stesso nell'intervallo di tempo che comincia con t e finisce con $t + \Delta t$, oppure che comincia con $t - \Delta t$ e finisce con t.*

* L'esistenza di questo limite, come scaturisce da quanto segue, è una conseguenza dell'ipotesi del § 110 che le coordinate del punto mobile siano funzioni del tempo dotate di coefficiente differenziale. Del resto, ogniqualvolta è asserita l'esistenza d'un limite, è sottinteso che si ammette per ipotesi.

In altre parole, chiamiamo velocità del punto al tempo t il vettore che ha per orientazione quella della tangente alla trajettoria nel posto occupato dal punto mobile al tempo t, volta nel senso del movimento allo stesso istante — cioè il limite della segante volta in questo senso (§ 111) — e, indicando con s la misura dell'arco di trajettoria avente per termine il suddetto posto occupato dal punto al tempo t, per grandezza $\left|\frac{ds}{dt}\right|$.

A questo vettore attribuiamo per asse la tangente suddetta, volta nel senso in cui cresce l'arco — s'intende il limite della segante volta nel senso medesimo. Con ciò la misura della velocità riesce $\frac{ds}{dt}$. Difatti, secondo che, conformemente a queste convenzioni, il vettore ha il senso dell'asse o senso opposto, e la sua misura si deve prendere positiva o negativa, sarà $\frac{ds}{dt}$ positivo o negativo.

§ 137. — Secondo questa definizione, la quantità di velocità è una quantità derivata (§ 27) la cui unità, indicando con $[l]$, $[t]$ quelle di lunghezza e di tempo, sarà rappresentata da $[l t^{-1}]$, e cioè ha dimensioni 1 rispetto all'unità di lunghezza e — 1 rispetto all'unità di tempo. Nel moto uniforme questa quantità risulta la lunghezza dell'arco di trajettoria che il punto mobile è atto a descrivere nell'unità di tempo; per modo che l'unità di velocità corrisponde all'ipotesi che l'unità di lunghezza sia descritta con movimento uniforme nell'unità di tempo.

§ 138. — Assunta una terna d'assi cartesiani ortogonali, indichino al solito x, y, z le coordinate del punto mobile al tempo t. Essendo $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ i coseni di direzione della tangente alla trajettoria nel punto (x, y, z), volta nel senso in cui cresce l'arco di misura s, le componenti della velocità del punto al tempo t secondo i tre assi saranno:

$$\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds},$$

cioè:

$$\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt}.$$

Così la determinazione della velocità ad un istante coincide con quella dei coefficienti differenziali delle coordinate del punto rispetto a t, pel valore di t che segna l'istante medesimo.

§ 139. — Allo stesso modo, se s' indica la misura d'un arco di linea qualunque terminato ad una projezione del punto (x, y, z) sulla linea medesima, si troverà che la componente della velocità d'esso punto al tempo t secondo la tangente alla seconda linea in detta projezione, volta nel senso in cui cresce l'arco, è $\frac{ds'}{dt}$ (§ 63).

Il movimento di questa projezione si dice la " projezione del movimento del punto considerato sulla linea „. Vediamo così che la velocità della projezione medesima ad ogni istante altro non è che il componente secondo il suo asse della velocità, allo stesso istante, del punto considerato.

§ 140. — Analogamente, il movimento della projezione del punto sopra un piano qualsivoglia si dice la " projezione del movimento del punto sul piano „. E, per quanto precede, il componente della velocità del punto ad ogni istante secondo il piano (§ 36) è la velocità della projezione all'istante medesimo.

§ 141. — Data la posizione del punto ad un istante, corrispondente per esempio al tempo zero, *che s'intende, in generale, fissato a piacere*, e la velocità ad ogni altro istante, corrispondente al tempo qualunque t, nell'ipotesi che essa sia una funzione finita e continua di t, il movimento del punto sarà determinato.

Difatti, da:

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w, \tag{1}$$

dove u, v, w rappresentano funzioni di t finite e continue, colla condizione:

$$t = 0: \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \tag{2}$$

segue:

$$x = x_0 + \int_0^t u\, dt, \qquad y = y_0 + \int_0^t v\, dt, \qquad z = z_0 + \int_0^t w\, dt.$$

Più in generale potremo supporre la velocità funzione continua e finita del tempo t esplicitamente, e implicitamente mediante

le coordinate x, y, z del punto al tempo t: cioè u, v, w funzioni finite e continue di t, x, y, z.

Al sistema (1) di tre equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine corrisponderà il sistema d'equazioni integrali:

$$F_i(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

dove C_1, C_2, C_3 rappresentano tre costanti arbitrarie. E queste costanti, per (2), saranno determinate dalle tre equazioni:

$$F_i(0, x_0, y_0, z_0, C_1, C_2, C_3) = 0. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ancora più generalmente possiamo supporre u, v, w funzioni continue e finite di t e delle coordinate x, y, z del punto che si considera e d'altri $n - 1$ punto, per ciascun dei quali sono date nello stesso modo le componenti della velocità alla fine d'ogni tempo t, e la posizione per $t = 0$. Si avrà allora un sistema di $3n$ equazioni differenziali alle derivate ordinarie del 1° ordine, cui corrisponderà un sistema d'altrettante equazioni integrali fra t, le coordinate degli n punti, e $3n$ costanti arbitrarie, per determinare le quali serviranno le equazioni che se ne ricavano facendovi $t = 0$.

Finalmente, concepito il punto (x, y, z) come punto qualunque d'un corpo in movimento continuo, individuato dalla sua posizione (x_0, y_0, z_0) per $t = 0$: e per conseguenza x, y, z, funzioni continue e finite di t nell'intervallo relativo al movimento, e di x_0, y_0, z_0 nel campo rappresentato dal corpo nella posizione corrispondente a $t = 0$, potremo supporre u, v, w funzioni continue e finite di:

$$t, x, y, z, x_0, y_0, z_0 \frac{dx}{dx_0}, \frac{dy}{dy_0}, \frac{dz}{dz_0}, \frac{d^2x}{dx^2_0}, \ldots \frac{dx}{dy_0} \cdot \ldots$$

E in tal caso le (1) saranno un sistema d'equazioni differenziali alle derivate parziali, del 1° ordine rispetto a t, assoggettate alle condizioni (2); le quali si dicono condizioni " di tempo ", perchè soddisfatte da tutti i punti ad un tempo determinato.

§ 142. — Le precedenti proprietà forniscono un concetto della natura di questo elemento del moto di un punto, che abbiamo chiamato la sua velocità ad un istante.

Nel caso del movimento uniforme la quantità di velocità, essendo la lunghezza dell'arco di trajettoria corrispondente all'unità di tempo, è una naturale misura della rapidità del movimento, che spiega abbastanza la scelta del termine. Nel caso più generale, la velocità media nell'intervallo compreso fra la fine del tempo t e quello del tempo $t + \Delta t$ è la velocità di un movimento uniforme e rettilineo che conduce il punto mobile dal posto occupato al primo istante al posto occupato al secondo nello stesso tempo Δt; e concepito l'intervallo di tempo considerato decomposto in tanti intervalli parziali di durata Δt, la successione di questi movimenti tanto più si approssimerà al movimento considerato quanto più gl'intervalli parziali saranno brevi; per modo che il termine di velocità applicato al limite della velocità media collo svanire di Δt apparisce ancora opportuno.

Ma non si deve cercare la necessità di questo termine. Dal momento che il mobile si considera ad un istante, mancano le condizioni necessarie per definire ciò che s'intuisce per rapidità o velocità, che sono un intervallo di tempo, per breve che sia, e lo spazio descritto in questo tempo: e analogamente manca, secondo il comune criterio, il modo di definire l'orientazione. La rapidità e l'orientazione istantanea non si possono definire che in base ad una convenzione particolare, qual'è la precedente.

Ad ogni modo, l'importanza di questo elemento va cercata nella parte che sostiene nella teoria del movimento; della quale, diremmo, la sua parentela col concetto di rapidità e d'orientazione non traduce che un semplice aspetto.

Velocità nel movimento traslatorio.

§ 143. — Tutti i punti d'un sistema che, in un intervallo di tempo, è in moto traslatorio hanno ad ogni istante egual velocità; come immediatamente scaturisce dalla circostanza che, se M, M' e N, N' sono i posti di due punti a due diversi istanti, i segmenti MM', NN' sono eguali e egualmente orientati.

Reciprocamente, se ad ogni istante d'un intervallo di tempo tutti i punti di un sistema hanno egual velocità, il moto del sistema, in quell'intervallo di tempo, è traslatorio.

Difatti, da:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t), \quad \frac{dy}{dt} = \chi(t), \quad \frac{dz}{dt} = \psi(t), \tag{1}$$

dove $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ sono certe funzioni del tempo t, con:

$$t = 0: \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \tag{2}$$

esprimenti che al tempo t la velocità sarà eguale, qualunque sia il punto individuato dal suo posto iniziale (x_0, y_0, z_0) segue, supposte le funzioni integrabili:

$$x - x_0 = \int_0^t \varphi(t)\,dt, \quad y - y_0 = \int_0^t \chi(t)\,dt, \quad z - z_0 = \int_0^t \psi(t)\,dt:$$

cioè eguale per tutti i punti, ad ogni istante, lo spostamento corrispondente al passaggio dal posto iniziale (x_0, y_0, z_0) al posto a quell'istante.

Per conseguenza, le (1) colle (2) definiscono un moto traslatorio (§ 120).

La velocità comune a tutti i punti d'un sistema in moto traslatorio ad un instante si chiama la " velocità del movimento traslatorio " a quell'istante.

Velocità nel movimento rotatorio.

§ 144. — La velocità di un punto qualunque d'un sistema in movimento rotatorio, ad ogni istante, è perpendicolare al piano passante pel posto del punto a quell'istante e per l'asse di rotazione. Per quanto al senso del suo asse, potrà essere quello che corrisponde ad un giro positivo del semipiano terminato all'asse di rotazione e passante pel punto, rispetto all'asse di rotazione nel supposto senso — cioè la misura dell'arco della trajettoria crescente nel senso in cui cresce l'angolo di rotazione φ — oppure l'opposto. E la misura della velocità, indicando con ρ la distanza del punto dall'asse di rotazione, sarà $\pm \frac{\rho\, d\varphi}{dt} = \pm \rho \frac{d\varphi}{dt}$, dove, secondo che si suppone l'uno o l'altro caso, va preso + o —.

Questo senso dell' asse della velocità sarà, alla sua volta, secondo l' ipotesi, positivo o negativo per rispetto al giro che conduce, per l'angolo concavo, un raggio uscente da un punto dell'asse di rotazione, dall'asse medesimo, alla posizione contenente il punto considerato.

Quindi, assumendo una terna d'assi cartesiani ortogonali, e indicando con α, β, γ, i coseni di direzione dell'asse di rotazione col proprio senso, con a, b, c le coordinate d'un punto di esso, e con x, y, z le coordinate al tempo t del punto qualsivoglia del sistema, si trova, in ogni caso, per (2, § 17):

$$\frac{dx}{dt} = \omega(t)\{\beta(z-c) - \gamma(y-b)\}$$
$$\frac{dy}{dt} = \omega(t)\{\gamma(x-a) - \alpha(z-c)\} \qquad (1)$$
$$\frac{dz}{dt} = \omega(t)\{\alpha(y-b) - \beta(x-a)\}$$

dove:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}.$$

§ 145. — Reciprocamente, se la velocità del punto qualunque d'un sistema, le cui coordinate al tempo t sono x, y, z, sono fornite dalle (1) del precedente §, dove α, β, γ e a, b, c sono costanti, e $\omega(t)$ una certa funzione del tempo, il movimento del sistema è rotatorio, l'asse di rotazione è la retta, R, passante pel punto (a, b, c) coll'orientazione (α, β, γ), e $\omega(t)$ è il coefficiente differenziale dell' angolo di rotazione rispetto al tempo, pel valor t del tempo medesimo.

Difatti, abbiano luogo le (1, § 144) colla condizione:

$$t = 0: \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0. \qquad (1)$$

Da quelle equazioni si ha, in primo luogo:

$$\alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \gamma\frac{dz}{dt} = 0 \qquad (2)$$

$$(x-a)\frac{dx}{dt} + (y-b)\frac{dy}{dt} + (z-c)\frac{dz}{dt} = 0 \qquad (3)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \rho^2\omega^2(t), \qquad (4)$$

dove ρ rappresenta la grandezza della distanza del punto (x, y, z) dalla retta R.

Le equazioni (2) e (3) forniscono immediatamente:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = C_1 \tag{5}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = C_2; \tag{6}$$

donde, determinando le costanti C_1, C_2 colle (1):

$$\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (z - z_0) = 0$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2.$$

E queste equazioni, concependo x, y, z come coordinate di punto corrente, sono quelle d'una circonferenza di circolo col centro sulla suddetta retta, in un piano ad essa perpendicolare, passante pel punto (x_0, y_0, z_0), posto iniziale del punto considerato.

Indichiamo con φ la misura dell'angolo di cui deve girare un semipiano terminato alla retta R, in senso positivo rispetto al senso definito da (α, β, γ), per passare da una posizione fissa a quella che contiene il punto (x, y, z) della circonferenza suddetta: e sia s la misura dell'arco corrispondente, col termine nel punto (x, y, z) e l'origine nella intersezione (x_1, y_1, z_1) della circonferenza colla posizione fissa del semipiano. Sarà $s = \rho\, \varphi$. E poichè la (4) può porsi sotto la forma:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \rho^2\, \omega^2 (t),$$

ne viene:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega^2 (t).$$

Per le supposte relazioni (1, § 144), la velocità di ogni punto al tempo t ha il senso corrispondente ad un giro positivo rispetto all'asse (α, β, γ) o l'opposto secondo che $\omega(t)$ è positivo o negativo. Quindi nei due casi sarà il suddetto angolo al tempo t rispettivamente crescente o decrescente, e concludiamo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega (t),$$

$$\varphi = \int_0^t \omega (t)\, dt + C_3, \qquad \varphi' - \varphi = \int_t^{t'} \omega (t)\, dt,$$

dove C_3 rappresenta una costante arbitraria, e t' un valore qualunque del tempo, come t. Tutto ciò che volevamo dimostrare.

Osservazione. Questo è un esempio istruttivo d'integrazione delle (1, § 141) nell'ipotesi che u, v, w siano funzioni di t, x, y, z, sotto le condizioni (2, § 141).

Due equazioni integrali sono le (5), (6). Si ha poi:

$$4\rho^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

dove:

$$\rho^2 = \big(\beta(z_1 - c) - \gamma(y_1 - b)\big)^2 + \big(\gamma(x_1 - a) - \alpha(z_1 - c)\big)^2 + \big(\alpha(y_1 - b) - \beta(x_1 - a)\big)^2.$$

Quindi:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = 4\rho^2 \sin^2 \frac{1}{2}\left(\int_0^t \omega(t)\,dt + C_3\right),$$

che è la terza equazione integrale.

Notiamo che le x_1, y_1, z_1 debbono soddisfare alle (5), (6), per modo che si può intendere che due di esse siano espresse in termini delle C_1, C_2, mentre la rimanente è una costante data, come le α, β, γ, a, b, c.

Per quanto a C_1, C_2, C_3, facendo nelle tre equazioni $t = 0$ si ha immediatamente:

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = C_1$$

$$(x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta + (z_0 - \gamma) = C_2$$

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 = 4\rho^2 \sin^2 \frac{1}{2} C_3 .$$

§ 146. — "Velocità angolare" d'un sistema in movimento rotatorio al tempo t chiamiamo il vettore avente l'asse orientato come l'asse di rotazione, e per misura il coefficiente differenziale dell'angolo di rotazione rispetto al tempo, pel supposto valor t; quindi, coi precedenti simboli, $\omega(t)$.

Così, la quantità di velocità angolare è una quantità derivata la cui unità ha dimensioni — 1 rispetto all'unità di tempo $[t]$, e 1 rispetto all'unità d'angolo; ma poichè è stabilito che questa sia l'unità assoluta (§ 14), sulla quale ipotesi si fonda l'espressione $\pm \rho \dfrac{d\varphi}{dt}$ della misura della velocità dei singoli punti (§ 144),

e ogni altra che se ne deduce, basta considerare la sua dipendenza dall'unità di tempo, e rappresentarla con $[t^{-1}]$. Questa unità è l'angolo di cui un sistema in movimento rotatorio uniforme gira nell'unità di tempo.

Osserviamo che il segno della velocità angolare ad ogni istante sarà quello del movimento rotatorio (§ 121) all'istante medesimo, per rispetto all'asse di rotazione.

§ 147. — Posto:

$$p = \omega(t)\,\alpha, \qquad q = \omega(t)\,\beta, \qquad r = \omega(t)\,\gamma$$
$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt},$$

p, q, r sono le componenti delle velocità angolare al tempo t, secondo gli assi coordinati.

Con questa scrittura le (1, § 144) diventano:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= q(z-c) - r(y-b) = (b-y)\,r - (c-z)\,q \\ \frac{dy}{dt} &= r(x-a) - p(z-c) = (c-z)\,p - (a-x)\,r \qquad (1) \\ \frac{dz}{dt} &= p(y-b) - q(x-a) = (a-x)\,q - (b-y)\,p \end{aligned}$$

conformemente alle quali espressioni, la velocità d'ogni punto d'un sistema in movimento rotatorio ad ogni istante è il momento rispetto a questo punto come polo del vettore applicato di cui il vettore è la velocità angolare, e l'asse d'applicazione l'asse di rotazione del movimento considerato.

Reciprocamente, le (1), applicate ad un intervallo di tempo, nell'ipotesi che p, q, r siano funzioni del tempo t, e costanti le a, b, c e i valori assoluti dei rapporti:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \qquad (2)$$

definiscono un movimento rotatorio, del quale la velocità angolare è (p, q, r), e l'asse passa pel punto (a, b, c) (§ 145). Il senso di questo asse si potrà fissare ad arbitrio; e stabilito che sia, la misura della velocità angolare si assumerà positiva o negativa secondo che l'orientazione definita dalle (2) è quella stessa oppure l'opposta.

Atto di movimento.

§ 148. — “Atto di movimento„ d'un sistema ad un istante chiamiamo l'insieme delle velocità di tutti i suoi punti a quell'istante.

Ogni legge particolare con cui la velocità all'istante considerato varia da punto a punto definisce un atto di movimento di speciale natura.

§ 149. — Atto di movimento risultante o composto di più altri è quello pel quale la velocità d'ogni punto è composta delle velocità corrispondenti a questi altri.

Evidentemente, se in un intervallo di tempo piccolo finchè si vuole, che comincia o finisce coll'istante considerato, il movimento del sistema si può concepire composto di certi altri movimenti, sarà l'atto di movimento allo stesso istante composto degli atti di movimento relativi ai singoli movimenti componenti.

Atto di movimento traslatorio.

§ 150. — “Atto di movimento traslatorio„ diciamo quello pel quale, all'istante considerato, tutti i punti del sistema hanno egual velocità.

Questa si chiama la “velocità dell'atto di movimento traslatorio„.

Atto di movimento rotatorio.

§ 151. — “Atto di movimento rotatorio„ diciamo quello pel quale, all'istante considerato, la velocità d'ogni punto è il momento d'un determinato vettore applicato, fisso, rispetto al punto considerato come polo.

Per conseguenza, la velocità è nulla per tutti i punti dell'asse del vettore, che, col proprio senso, si chiama l' “asse istantaneo di rotazione„: e per ogni altro punto ha grandezza

eguale al prodotto delle grandezze del vettore e della mutua distanza del punto e dell' asse: è perpendicolare al piano del punto e dell'asse: e il suo senso è tale che il giro conducente ad essa, per l'angolo retto, dalla perpendicolare all'asse descritta verso il punto è positivo rispetto all'orientazione del vettore.

Il vettore in discorso, la cui misura riesce, per quanto precede, positiva o negativa secondo che il giro in discorso è positivo o negativo rispetto all' asse di rotazione, si dice la " velocità angolare dell'atto rotatorio ".

Per quanto al senso dell'asse di rotazione, osserviamo che, immaginando i circoli passanti pei singoli punti, in piani perpendicolari all'asse, col centro sull'asse, il senso del movimento d'ogni punto del sistema supposto in atto rotatorio corrisponderà ad un giro sul relativo circolo in senso, rispetto ad un determinato senso dell'asse, eguale per tutti; per modo che, se, con una scelta opportuna dell' origine degli archi sulle singole traiettorie, si suppone egualmente concorde il senso in cui cresce l'arco medesimo, la velocità avrà per tutti i punti misura positiva o negativa. Giova stabilire, in tale ipotesi, che l'asse di rotazione, cioè l'asse del vettore, abbia il senso del vettore, o l'opposto, secondo che questa misura è positiva o negativa; allora la misura della velocità d'ogni punto del sistema in atto rotatorio sarà il prodotto della misura della velocità angolare per la distanza del punto dall'asse.

Indicando con u, v, w le componenti della velocità del punto di cui all'istante considerato x, y, z sono le coordinate, segue dalla definizione che condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema sia in atto di movimento rotatorio è che sia

$$\begin{aligned} u &= q\,(z-c) - r\,(y-b), \\ v &= r\,(x-a) - p\,(z-c), \\ w &= p\,(y-b) - q\,(x-a), \end{aligned}$$

dove a, b, c, p, q, r sono indipendenti da x, y, z.

I coseni di direzione della velocità angolare saranno in tal caso:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

col radicale positivo, e la grandezza della velocità angolare lo stesso radicale positivo. L'asse istantaneo di rotazione passerà pel punto (a, b, c): la sua direzione sarà quella della velocità angolare: e il suo senso concorde oppure contrario, alle quali due ipotesi debbono corrispondere quelle della misura rispettivamente positiva e negativa.

Composizione degli atti di movimento traslatorii e rotatorii. Atto di movimento elicoidale.

§ 152. — L'atto di movimento composto di due o più atti di movimento traslatorio è evidentemente un atto di movimento traslatorio, la cui velocità è la risultante di quelle dei componenti.

§ 153. — L'atto di movimento composto di un atto traslatorio e d'un atto rotatorio si chiamerà " rototraslatorio ".

Atto di movimento " elicoidale " si chiama quello che è composto d'un traslatorio e d'un rotatorio, nell'ipotesi che la velocità del primo e la velocità angolare, ossia l'asse, del secondo siano fra loro paralleli.

§ 154. — L'atto di movimento composto d'un atto traslatorio e d'un rotatorio, quando la velocità del primo è perpendicolare all'asse del secondo, è un atto rotatorio.

Difatti, prendasi per asse delle z l'asse dell'atto di movimento rotatorio col senso della velocità angolare, e l'asse delle x orientato come la velocità dell'atto traslatorio; e indichino v e ω la grandezza della velocità dell'atto traslatorio e della velocità angolare dell'atto rotatorio.

Le componenti della velocità del punto (x, y, z), cioè del punto di cui x, y, z sono le coordinate all'istante considerato, saranno v, o, o nell'atto traslatorio: $-\omega y, \omega x$, o nell'atto rotatorio: $\mathrm{v} - \omega y, \omega x$, o nell'atto composto, cioè:

$$-\omega\left(y - \frac{\mathrm{v}}{\omega}\right), \qquad \omega x, \qquad 0$$

c. v. d.

Si vede poi che la velocità angolare dell'atto rotatorio risultante è eguale a quella del componente: e il suo asse si

deduce da quello del componente con una traslazione di grandezza $\frac{V}{\omega}$ — cioè eguale al rapporto della velocità dell'atto traslatorio alla velocità angolare dell'atto rotatorio — perpendicolare a queste due velocità: in tal senso, che per rispetto ad essa, è positivo il giro che conduce per l'angolo retto dalla seconda alla prima.

§ 155. — L'atto di movimento composto d'un atto traslatorio e d'un atto rotatorio, quando la velocità del primo non è perpendicolare all'asse del secondo, è un atto di movimento elicoidale (§ 153).

Infatti, sia

$$\begin{aligned} u &= l + q(z - c) - r(y - b) \\ v &= m + r(x - a) - p(z - c) \\ w &= n + p(y - b) - q(x - a), \end{aligned} \tag{1}$$

e

$$lp + mq + nr \gtrless 0.$$

Uno almeno dei tre p, q, r dev'essere diverso da o. Sia p diverso da o, e poniamo:

$$\begin{aligned} l &= p\lambda + q\nu - r\mu = \quad p\lambda - r\mu + q\nu \\ m &= q\lambda + r\lambda - p\nu = (q + r)\lambda \quad - p\nu \\ n &= r\lambda + p\lambda - q\nu = (r - q)\lambda + p\mu. \end{aligned} \tag{2}$$

Si ha:

$$\begin{vmatrix} p & -r & q \\ q + r & 0 & -p \\ r - q & p & 0 \end{vmatrix} = p(p^2 + q^2 + r^2).$$

Quindi le precedenti relazioni definiscono λ, μ, ν in termini di l, m, n, p, q, r. E non potrà essere $\lambda = 0$, perchè dalle relazioni stesse si ricava:

$$lp + mq + rn = (p^2 + q^2 + r^2)\lambda. \tag{3}$$

Ora, introducendo le (2) nelle (1), si trova:

$$\begin{aligned} u &= p\lambda + q(z - c + \nu) - r(y - b + \mu) \\ v &= q\lambda + r(x - a + \lambda) - p(z - c + \nu) \\ w &= r\lambda + p(y - b + \mu) - q(x - a + \lambda); \end{aligned}$$

con che la proposizione è dimostrata.

Notiamo che la velocità angolare dell'atto rotatorio componente dell'atto elicoidale è la stessa come quella dell'atto rotatorio componente dell'atto rototraslatorio dato.

Supposto:

$$lp + mq + nr = o,$$

la (3) ci dà $\lambda = o$: cioè l'atto di movimento composto è un atto rotatorio, conformemente al già detto.

§ 156. — L'atto di movimento composto di due atti rotatorii cogli assi paralleli — escluso il caso che le velocità angolari abbiano grandezza eguale e senso opposto — è un atto rotatorio.

Indichino ω_1, ω_2 la misura della velocità angolare del primo e del secondo atto rotatorio nell'ipotesi che gli assi abbiano ambedue il senso della velocità angolare di grandezza maggiore; e sia $|\omega_1| > |\omega_2|$, per modo che $\omega_1 > o$, e $\omega_2 > o$ o $< o$, secondo che le due velocità angolari sono concordi o no, ma sempre $\omega_1 + \omega_2 > o$.

Assumiamo l'asse del primo atto rotatorio per asse delle z, e l'asse delle x positive passi per l'asse del secondo.

Le componenti della velocità del punto (x, y, z) saranno, pel primo atto rotatorio:

$$-\omega_1 y, \qquad \omega_1 x, \qquad o:$$

pel secondo:

$$-\omega_2 y, \qquad \omega_2 (x - a) \qquad o,$$

con $a > o$: e per l'atto composto:

$$-(\omega_1 + \omega_2) y, \quad (\omega_1 + \omega_2)\left(x - a\,\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\right), \quad o;$$

c. v. d.

Vediamo poi che la velocità angolare dell'atto rotatorio risultante è parallela a quella dei componenti, concorde con quella la cui grandezza è maggiore, e di grandezza eguale alla somma o alla differenza delle loro grandezze secondo che esse sono concordi o no; mentre l'asse — parallelo a quello dei componenti — si trova nel piano dei loro assi, compreso fra essi, a distanze inversamente proporzionali alle grandezze delle velo-

cità angolari, se queste sono concordi, e diversamente nella posizione simmetrica per rispetto all'asse cui corrisponde la velocità angolare di grandezza maggiore.

Nel caso che due atti di movimento rotatòrio abbiano velocità angolari parallele, di grandezza eguale e senso opposto, l'atto di movimento composto è traslatorio. Difatti, in questo caso le componenti della velocità del punto (x, y, z) saranno $-\omega_1 y, \omega_1 x$, o per un atto di movimento componente, e $\omega_1 y, -\omega_1 (x - a)$, o per l'altro: donde segue che saranno o, $a\omega_1$, o per l'atto composto. E cioè questo sarà un atto di movimento traslatorio, la cui velocità ha per grandezza il prodotto di quelle della velocità angolare dei due atti e della mutua distanza dei due assi: direzione perpendicolare al loro piano: e senso tale che il giro d'un raggio spiccato da uno degli assi, per passare dall' intersecare l'altro asse a quella orientazione, per l'angolo retto, è positivo rispetto alla velocità angolare corrispondente all'asse medesimo.

§ 157. — L'atto di movimento composto di due atti rotatorii i cui assi concorrono in un punto è un atto rotatorio.

Assunto il punto comune per origine delle coordinate, le componenti delle velocità del punto (x, y, z) saranno:

$$q_1 z - r_1 y, \quad r_1 x - p_1 y, \quad p_1 y - q_1 x$$

pel primo componente;

$$q_2 z - r_2 y, \quad r_2 x - p_2 z, \quad p_2 y - q_2 x$$

pel secondo; e quindi:

$$\begin{gathered}(q_1 + q_2) z - (r_1 + r_2) y, \\ (r_1 + r_2) x - (p_1 + p_2) z, \\ (p_1 + p_2) y - (q_1 + q_2) x\end{gathered}$$

per l'atto di movimento composto; c. v. d.

Si vede poi che la velocità angolare dell' atto rotatorio risultante è composta della velocità angolari dei componenti, e l'asse passa pel punto comune ai loro assi.

Ne viene che, descritti pel punto di concorso dei due assi i segmenti aventi l'orientazione e la grandezza delle velocità angolari dei due atti di movimento componenti, la diagonale del parallelogrammo contenuto da questi segmenti, spiccata dal

punto, rappresenta egualmente la velocità angolare dell' atto composto e segna il suo asse. Donde il nome di " parallelogrammo delle velocità angolari " con cui si designa qualche volta questa proposizione.

Ogni atto di movimento rigido si riduce ad un atto di movimento elicoidale.

§ 158. — " Rigido " o " conciliabile colla rigidità " chiamiamo ogni atto di movimento conciliabile coll'ipotesi che il sistema in un intervallo di tempo piccolo finchè si vuole, che comincia o finisce coll'istante considerato, è in movimento rigido.

Quindi se ad un istante un sistema è in atto di movimento rigido, indicando con α, β, γ e con α_i, β_i, γ_i, $(i = 1, 2, 3)$ le coordinate e i coseni di direzione rispetto ai supposti assi d'una terna analoga invariabilmente connessa col sistema, dev'essere per ogni punto, al tempo considerato t, e in tutto un intervallo che ha tale istante per un suo estremo:

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x} + \alpha_2 \mathfrak{y} + \alpha_3 \mathfrak{z} \\
y &= \beta + \beta_1 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \beta_3 \mathfrak{z} \\
z &= \gamma + \gamma_1 \mathfrak{x} + \gamma_2 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z} ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

dove $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, invariabili col tempo, sono le coordinate del punto rispetto alla terna mobile. E per conseguenza l'atto di movimento rigido sarà quello pel quale le componenti della velocità del punto qualunque del sistema sono rappresentate da:

$$
\begin{aligned}
u &= \alpha' + \frac{d\alpha_1}{dt}\mathfrak{x} + \frac{d\alpha_2}{dt}\mathfrak{y} + \frac{d\alpha_3}{dt}\mathfrak{z} \\
v &= \beta' + \frac{d\beta_1}{dt}\mathfrak{x} + \frac{d\beta_2}{dt}\mathfrak{y} + \frac{d\beta_3}{dt}\mathfrak{z} \\
w &= \gamma' + \frac{d\gamma_1}{dt}\mathfrak{x} + \frac{d\gamma_2}{dt}\mathfrak{y} + \frac{d\gamma_3}{dt}\mathfrak{z} ,
\end{aligned} \tag{2}
$$

dove α_i, β_i, γ_i, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ hanno il precedente significato, e α', β', γ', componenti della velocità del punto del sistema assunto per

origine degli assi mobili, possono essere costanti (rispetto al punto) quali si vogliano.

Ora stabiliamo, per brevità di scrittura, che

$$\Sigma F (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$$

rappresenti la somma

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + F(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3);$$

che

$$\underset{(\alpha, \beta, \gamma)}{\mathrm{S}} F(\alpha, \beta, \gamma)$$

rappresenti la somma, parimente di tre termini, di cui il primo è quello scritto e gli altri due devono dedursi da esso permutando circolarmente α, β, γ; finalmente, che

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma)\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$$

rappresenti la terna di formole di cui la prima è la scritta, e le altre due devono dedursi da essa colle permutazioni circolari simultanee di α, β, γ e α', β', γ'.

Conformemente a ciò, poniamo:

$$\Sigma \beta_i \frac{d\gamma_i}{dt} = p \qquad (p, q, r)\,(\alpha, \beta, \gamma) \tag{3}$$

Ne viene:

$$\Sigma \gamma_i \frac{d\beta_i}{dt} = -p \qquad (p, q, r)\,(\alpha, \beta, \gamma) \tag{4}$$

Inoltre:

$$\Sigma \alpha_i \frac{d\alpha_i}{dt} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \tag{5}$$

Queste sono nove relazioni, mediante le quali possiamo facilmente esprimere i nove coefficienti differenziali:

$$\frac{d\alpha_i}{dt}, \; \frac{d\beta_i}{dt}, \; \frac{d\gamma_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

in funzione di $p, q, r, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Si troverà subito moltiplicando la prima delle (5) per α_1, la terza delle (4) per β_1, la seconda delle (3) per γ_1, e poi sommandole membro a membro:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = q\gamma_1 - r\beta_1 .$$

E di qui desumiamo senz'altro il quadro brevemente rappresentato da:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = q\,\gamma_i - r\,\beta_i \qquad (\alpha, \beta, \gamma)\,(p, q, r). \tag{6}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Introducendo queste formole nelle (2) e richiamando le (1) abbiamo:

$$\begin{aligned} u &= \alpha' + q\,(z - \gamma) - r\,(y - \beta) \\ v &= \beta' + r\,(x - \alpha) - p\,(z - \gamma) \\ w &= \gamma' + p\,(y - \beta) - q\,(x - \alpha), \end{aligned} \tag{7}$$

le quali esprimono che l'atto di movimento in discorso è composto dell'atto di movimento traslatorio la cui velocità è $(\alpha', \beta', \gamma')$, e dell'atto rotatorio di cui la velocità angolare è (p, q, r) e l'asse passa pel punto (α, β, γ).

Quindi, stabilito che l'atto traslatorio e rotatorio si comprendano sotto il nome d'asse di movimento rototraslatorio o elicoidale, come corrispondenti al caso che sia nullo il componente rotatorio o traslatorio, concludiamo che l'atto di movimento rigido più generale si riduce a un atto rototraslatorio, il quale si riduce alla sua volta ad un atto di movimento elicoidale (cfr. § 90).

A suo luogo (§ 165) vedremo che, reciprocamente, se ad ogni istante d'un intervallo di tempo l'atto di movimento è rototraslatorio, il movimento, in quell'intervallo, sarà rigido.

§ 159. — Deduciamo alcune formole utili per la teoria del movimento dei corpi invariabili.

Indichino perciò $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ le componenti della velocità del punto qualunque del sistema secondo tre assi aventi l'orientazione degli assi mobili all'istante considerato. Pel precedente risultato:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{l} + \mathfrak{q}\,\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\,\mathfrak{y} \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{m} + \mathfrak{r}\,\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\,\mathfrak{z} \\ \mathfrak{w} &= \mathfrak{n} + \mathfrak{p}\,\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{x}, \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$, e $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ sono le componenti della velocità dell'atto

traslatorio e della velocità angolare dell'atto rotatorio secondo gli assi suddetti; cioè:

$$\mathfrak{l} = \alpha' \alpha_1 + \beta' \beta_1 + \gamma' \gamma_1 \qquad (\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \quad (1, 2, 3) \tag{2}$$

$$\mathfrak{p} = p\, \alpha_1 + q\, \beta_1 + r\, \gamma_1 \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \quad (1, 2, 3) \tag{3}$$

Per (3), e (3), (4) del precedente §:

$$\mathfrak{p} = \underset{(\alpha,\beta,\gamma)}{\mathrm{S}} \alpha_1 \Sigma \beta_i \frac{d\gamma_i}{dt} = - \underset{(\alpha,\beta,\gamma)}{\mathrm{S}} \alpha_1 \Sigma \gamma_i \frac{d\beta_i}{dt}.$$

E di quì:

$$2\mathfrak{p} = \underset{(\alpha,\beta,\gamma)}{\mathrm{S}} \frac{d\alpha_2}{dt} (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) + \underset{(\alpha,\beta,\gamma)}{\mathrm{S}} \alpha_3 \left(\frac{d\beta_3}{dt} \gamma_1 - \frac{d\gamma_3}{dt} \beta_1 \right),$$

donde per (2, § 17) si ricava immediatamente la prima delle:

$$\mathfrak{p} = \underset{(\alpha,\beta,\gamma)}{\mathrm{S}} \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt} \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \quad (1, 2, 3). \tag{4}$$

Da queste relazioni scaturiscono le tre analoghe:

$$- \mathfrak{p} = \underset{(\alpha,\beta,\gamma)}{\mathrm{S}} \alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \quad (1, 2, 3). \tag{5}$$

Inoltre hanno luogo le tre:

$$0 = \underset{(\alpha,\beta,\gamma)}{\mathrm{S}} \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt} \qquad (1, 2, 3) \tag{6}$$

Si ha così un sistema di nove equazioni lineari tra i nove coefficienti differenziali

$$\frac{d\alpha_i}{dt}, \frac{d\beta_i}{dt}, \frac{d\gamma_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$), che permettono agevolmente di esprimerli in funzione di questi ultimi.

Si troverà subito, moltiplicando la prima delle (6) per α_1, la seconda delle (5) per α_3, e la terza delle (4) per α_2, quindi sommando membro a membro:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \mathfrak{r}\, \alpha_2 - \mathfrak{q}\, \alpha_3.$$

E di quì si deduce il quadro rappresentato da:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \mathfrak{r}\,\lambda_2 - \mathfrak{q}\,\lambda_3 \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \quad (1, 2, 3), \qquad (7)$$
$$(\lambda = \alpha, \beta, \gamma)$$

§ 160. — La proposizione che ogni atto di movimento rigido si riduce ad un atto di movimento elicoidale si può affermare senz'altro fondandosi sulla proposizione analoga relativa agli spostamenti (§ 149); ma la deduzione diretta ha anche il vantaggio di fornire immediatamente le espressioni delle componenti della velocità angolare dell'atto rotatorio in termini delle $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) e loro coefficienti differenziali rispetto al tempo t.

Introducendo poi nelle (4, § 159) le relazioni stabilite al § 24 fra i suddetti coseni di direzione e gli angoli θ, φ e f, otteniamo, con un calcolo semplicissimo, le relazioni:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \sin f \frac{d\theta}{dt} + \cos f \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}, \\ \mathfrak{q} &= -\cos f \frac{d\theta}{dt} + \sin f \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}, \\ \mathfrak{r} &= -\frac{df}{dt} + \cos\theta \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Giova dedurre le stesse relazioni anche col metodo seguente, per mostrare un'applicazione della composizione dei movimenti e degli atti di movimento.

Premettiamo, che φ e f s'intendono compresi fra 0 e 2π, e θ fra 0 e π — se occorre, concependo sostituito θ a $2\pi - \theta$ e $\varphi + \pi, f + \pi$ a φ, f (cfr. § 24) —: limitazione che le formole a cui si arriva mostrano come non alteri il risultato.

Ciò posto, immaginiamo una terna d'assi, la quale ha ad ogni istante l'orientazione dei precedenti assi delle $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, ma l'origine comune colla terna degli assi fissi delle x, y, z; e designando gli assi medesimi con quei simboli, indichino per un momento χ e ψ, compresi fra zero e 2π, le misure degli angoli corrispondenti, che coll'asse delle x forma la traccia del piano $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ sul piano xy, volta nel senso rispetto a cui è positivo il giro che conduce, per l'angolo θ, dall'asse delle z all'asse delle $\mathfrak{z}$, e colla traccia mede-

sima l'asse delle $\mathfrak{x}$: crescente il primo nel senso del giro positivo rispetto all'asse delle z che conduce dall'asse delle x alla traccia, e il secondo nel senso del giro positivo rispetto all'asse delle $\mathfrak{z}$ che conduce dalla traccia all'asse del $\mathfrak{x}$.* Intendiamo poi che θ, χ, ψ rappresentino i valori al tempo t, e indichiamo con $\theta + \Delta\theta$, $\chi + \Delta\chi$, $\psi + \Delta\psi$ i valori al tempo $t + \Delta t$, con Δt piccolo a piacere. In seguito a che consideriamo le due terne d'assi coordinati ortogonali, aventi l'origine comune cogli assi fissi, e mobili al variare di Δt: la prima, comprendente l'asse delle $\mathfrak{z}$ e la traccia precedentemente definita: e la seconda, questa traccia e l'asse delle $\mathfrak{x}$. È chiaro che il movimento di un corpo rigidamente connesso alla terna degli assi $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, relativo alla prima di queste due, è rotatorio, coll'asse delle $\mathfrak{z}$ per asse, e $\Delta\psi$ per angolo di rotazione al tempo $t + \Delta t$: mentre il movimento della terna stessa relativo alla seconda è, alla sua volta, un movimento rotatorio colla traccia per asse, e per angolo di rotazione $\Delta\theta$: e, finalmente, il movimento della seconda terna rispetto agli assi fissi, è anche rotatorio coll'asse delle z per asse, e $\Delta\chi$ per angolo di rotazione. Ne viene che l'atto di movimento del corpo considerato al tempo t sarà composto (§§ 149, 175) degli atti di movimento rotatorio, i cui assi sono l'asse delle $\mathfrak{z}$, la traccia, e l'asse delle z, nella loro posizione al tempo t, e la misura della velocità angolare rispettivamente $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$. Quindi, per la regola del parallelogrammo delle velocità angolari (§ 157), e tenendo poi calcolo che i coseni degli angoli degli assi $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, con ciascuno dei tre assi di rotazione suddetti sono:

$$0,\ \cos\psi,\ \gamma_1, \qquad 0,\ -\sin\psi,\ \gamma_2, \qquad 1,\ 0,\ \gamma_3,$$

rispettivamente, si ha in primo luogo (§ 35):

$$\mathfrak{p} = \cos\psi \frac{d\theta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\chi}{dt}, \quad \mathfrak{q} = -\sin\psi \frac{d\theta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\chi}{dt}, \quad \mathfrak{r} = \frac{d\psi}{dt} + \gamma_3 \frac{d\chi}{dt}.$$

E di qui, notando che $\chi - \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi + f = \frac{\pi}{2}$, si ricavano le (1).

* I due angoli così definiti, insieme coll'angolo θ degli assi delle z e delle $\mathfrak{z}$, — "angoli euleriani" — sono comunemente usati per fissare la posizione di una terna ortogonale rispetto ad un'altra. Gli angoli di cui noi facciamo uso allo stesso scopo sono quelli di cui si vale *Kirchhoff* nella più volte citata *Mechanik*.

Applicazione al movimento rigido.

§ 161. — Per quanto precede, il movimento rigido si può definire come quello in cui ad ogni istante l'atto di movimento è elicoidale. E mentre il passaggio del mobile dalla sua posizione al tempo t a quella al tempo $t + \Delta t$ si effettua mediante un determinato spostamento elicoidale, i cui elementi, fissato t, dipendono da Δt, è chiaro che l'orientazione e la grandezza del componente traslatorio dell'atto di movimento elicoidale relativo al tempo t è il limite collo svanire di Δt della orientazione e del valore assoluto del rapporto a Δt della grandezza del componente traslatorio del suddetto spostamento elicoidale; come l'asse e la misura della velocità angolare del componente rotatorio dell'atto di movimento elicoidale sono i limiti, egualmente collo svanire di Δt, dell'asse e del rapporto a Δt della misura dell'angolo di rotazione, evanescente con Δt, del componente rotatorio dello spostamento elicoidale medesimo.

Da ciò si deduce agevolmente che, se s'immaginano le due superficie rigate, l'una, connessa invariabilmente col sistema, luogo delle rette, ad esso invariabilmente connesse, che fungono ai singoli istanti da asse del corrispondente atto di movimento elicoidale, e l'altra, fissa nello spazio, luogo delle rette dello spazio colle quali le precedenti al relativo istante coincidono, sarà la prima superficie costantemente a contatto della seconda lungo una generatrice, la cui direzione sarà quella della velocità dei punti dell'asse all'istante del contatto. Ciò si esprime col dire che la prima superficie rotola sulla seconda, così da avere ad ogni istante comune con essa una generatrice, e striscia sopra di essa nella direzione della generatrice medesima.

Notiamo il caso del movimento polare, in cui le due superficie sono coniche col vertice nel polo, e, la velocità dei punti della generatrice comune, ad ogni istante, essendo nulla, l'una rotola sull'altra senza strisciare; e quello del movimento parallelo ad un piano, in cui le due superficie sono cilindriche colle generatrici perpendicolari al piano: che se s'immagina una sezione normale, il movimento si può definire col rotolamento senza strisciare della sezione della superficie mobile sulla sezione dell'altra, cioè d'una linea fissa al sistema sopra una linea fissa nello spazio.

Atto di movimento dislocatorio semplice.

§ 162. — " Atto di movimento dislocatorio semplice " alla fine di un certo tempo chiamiamo quello pel quale, concepita una terna d'assi coordinati cui si riferiscono i punti del mobile, le componenti della velocità d'ogni punto sono funzioni lineari delle coordinate del punto all'istante medesimo. Notiamo che a questa categoria appartiene l'atto traslatorio, rotatorio, rigido in generale.

Indicando con x, y, z, e u, v, w le coordinate e le componenti della velocità del punto qualunque del sistema all'istante considerato, sarà conformemente alla precedente definizione:

$$\begin{aligned} u &= a + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ v &= b + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ w &= c + c_1 x + c_2 y + c_2 z, \end{aligned} \qquad (1)$$

le quali si possono assumere, se si vuole per definizione dell'atto di movimento dislocatorio semplice in discorso.

§ 163. — Indichino ρ e α, β, γ la grandezza e i coseni di direzione del segmento terminato ai punti x_0, y_0, z_0 e x, y, z, per modo che:

$$x - x_0 = \rho\alpha, \quad y - y_0 = \rho\beta, \quad z - z_0 = \rho\gamma \qquad (1)$$

Di qui, per le (1) del § precedente, segue:

$$\frac{d\rho\alpha}{dt} = a_1 (x - x_0) + a_2 (y - y_0) + a_3 (z - z_0),$$

ossia la prima delle tre:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\alpha}{dt} &= \rho (a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma) \\ \beta \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\beta}{dt} &= \rho (b_1 \alpha + b_2 \beta + b_3 \gamma) \\ \gamma \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\gamma}{dt} &= \rho (c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma). \end{aligned} \qquad (2)$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma &= A_1, \\ b_1 \alpha + b_2 \beta + b_3 \gamma &= A_2, \\ c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma &= A_3. \end{aligned}$$

Moltiplicando le (2) rispettivamente per α, β, γ, e poi sommandole membro a membro, troviamo:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \Lambda_1\,\alpha + \Lambda_2\,\beta + \Lambda_3\,\gamma. \tag{4}$$

Quindi $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ non dipende che dalla direzione $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$ del segmento considerato: e noi lo chiameremo il " modulo di dilatazione lineare secondo la direzione considerata $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$ ".

Indicando detto modulo con λ, le stesse equazioni danno:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Lambda_1 - \lambda\,\alpha, \quad \frac{d\beta}{dt} = \Lambda_2 - \lambda\,\beta, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \Lambda_3 - \lambda\,\gamma \tag{5}$$

per modo che i coefficienti differenziali in discorso sono anche puramente dipendenti dalla direzione.

Siano α, β, γ, α', β', γ', i coseni di direzione individuanti due assi, e θ la misura dell'angolo compreso, positiva o negativa secondo che è positivo o negativo il giro conducente per quell'angolo dal primo asse al secondo rispetto alle perpendicolare al loro piano nel senso fissato come positivo. Da:

$$\cos\theta = \alpha\,\alpha' + \beta\,\beta' + \gamma\,\gamma'$$

segue:

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \alpha'\frac{d\alpha}{dt} + \beta'\frac{d\beta}{dt} + \gamma'\frac{d\gamma}{dt} + \alpha\frac{d\alpha'}{dt} + \beta\frac{d\beta'}{dt} + \gamma\frac{d\gamma'}{dt} \tag{6}$$

che permette coll'ajuto delle (5) di determinare $\frac{d\theta}{dt}$ in termini di α, β, γ, α', β', γ', e mostra come non dipenda che dalle due direzioni considerate. Chiameremo $-\frac{d\theta}{dt}$ il modulo di scorrimento dell'asse (α, β, γ) rispetto all'asse $(\alpha', \beta', \gamma')$.

§ 164. — Ora consideriamo il tetraedro avente per vertici i punti (x_i, y_i, z_i) $(i = 0, 1, 2, 3)$, e quindi per grandezza τ del volume il valor assoluto di

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Differenziando rispetto a t colla regola dei determinanti, e introducendo le (1) del § 162, si riconoscerà immediatamente che, se

s'immagina compiuto lo sviluppo dei determinanti in tal modo ottenuti, e raccolti i singoli parametri, il coefficiente di a_1, b_2, c_3 risulta (1), e zero quello dei rimanenti a_2, b_1... Quindi:

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = a_1 + b_2 + c_3 \,. \qquad (2)$$

Chiamiamo $\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt}$ il " modulo di dilatazione cubica ".

§ 165. — A questa specie appartiene l'atto di movimento rototraslatorio, il quale si ha nell'ipotesi che sia:

$$a_1 = b_2 = c_3 = 0, \quad c_2 = -b_3 = p, \quad a_3 = -c_1 = q, \quad b_1 = -a_2 = r.$$

Ne viene per (4, § 163), $\lambda = 0$, qualunque sia la direzione $(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma)$. Quindi, se ad ogni istante d'un intervallo, cioè per ogni valore di t dell'intervallo medesimo, l'atto di movimento è rototraslatorio, sarà in quell'intervallo, per ogni coppia di punti, indicando con ρ la grandezza della loro mutua distanza al tempo t:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \qquad \rho = \textit{Costante rispetto a } t;$$

vale a dire, il movimento sarà rigido (cfr. § 158).

§ 166. — Le proprietà generali dell'atto di movimento in discorso si deducono col procedimento seguito per la ricerca delle proprietà analoghe dello spostamento dislocatorio semplice, e perciò possiamo limitarci a enunciarle.

Pel § 92 l'atto di movimento in discorso è composto di un atto traslatorio la cui velocità è (a, b, c), e di un atto di movimento della stessa natura, pel quale le componenti della velocità del punto (x, y, z) sono:

$$\begin{array}{l} a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z \\ b_1\, x + b_2\, y + b_3\, z \\ c_1\, x + c_2\, y + c_3\, z\,, \end{array}$$

e quindi nulla la velocità del punto assunto per origine. Questo atto di movimento si chiamerà " omogeneo ", e quel punto la sua " origine ".

Supposto l'atto omogeneo, pel § 95, in generale vi sono una o tre rette uscenti dall'origine (rette speciali) aventi la proprietà

che la velocità per ogni loro punto ha la direzione della retta: mentre il senso dalle due parti dell'origine risulta l'opposto. I coseni di direzione α, β, γ di queste rette sono date dalle (3 § 95), dove λ rappresenta una radice reale dell'equazione cubica (4, § 95); e la stessa λ è poi il modulo di dilatazione lineare secondo la direzione della retta.

Lo stesso atto di movimento omogeneo più generale, pei §§ 101, 102, è composto di un atto rotatorio coll'asse passante per l'origine, e d'un atto della stessa specie " simmetrico ", cioè tale che $a_2 = b_1$, $b_3 = c_2$, $c_1 = a_3$: pel quale (§ 97 le rette speciali risultando tre, fra loro perpendicolari, la velocità d'ogni punto è composta di tre componenti aventi, ciascuno, l'asse parallelo ad una di quelle rette, e per misura il prodotto della misura della distanza del punto dal piano delle altre due, col segno + o — secondo che il punto si trova o no dalla parte donde è volto l'asse, per un fattore costante, modulo di dilatazione lineare secondo la direzione della retta a cui il componente si riferisce. Si vede che il componente secondo ognuno dei tre assi, dalla parte del piano delle rette speciali parallele agli altri due verso cui l'asse è volto, avrà il senso dell'asse quando il relativo coefficiente è positivo, e l'opposto quando è negativo: in altre parole, a seconda del caso, il componente, dalle due opposte parti del suddetto piano, volgerà all'infuori del piano medesimo o verso di esso.

Chiamiamo " atto di movimento dilatatorio normale ad un piano (base) " l'atto di movimento pel quale la velocità d'ogni punto ha per asse la perpendicolare al piano volta in un certo senso, e misura data dal prodotto della misura della distanza del punto dal piano, col segno + o — secondo che il punto giace dalla parte donde è volto l'asse oppure dalla parte opposta, per un fattore costante — modulo di dilatazione lineare principale — per modo che il senso della velocità dai due lati del piano risulta opposto; che se il punto appartiene al piano la velocità è nulla.

Ciò posto, il suddetto atto di movimento simmetrico sarà composto di tre atti di movimento dilatatorio normali a tre piani passanti per l'origine, fra loro ortogonali, — i piani delle tre

rette speciali a due a due — i cui moduli di dilatazione principali sono i moduli di dilatazione lineare secondo le direzioni delle rette medesime (cfr. §§ 98, 99).

Il modulo di dilatazione lineare secondo ogni direzione, il modulo di scorrimento d'un asse rispetto ad un altro, il modulo di dilatazione cubica, sono gli stessi per l'atto di movimento omogeneo più generale e pel suo componente simmetrico (§ 102). Perciò chiameremo " terna vettoriale delle velocità di dilazione „ dell'atto di movimento considerato la terna vettoriale applicata all'origine, le cui direzioni sono quelle delle rette speciali del componente simmetrico, e le quantità i moduli di dilatazione corrispondenti; i quali si diranno i " moduli di dilatazione principali „ dell'atto di movimento considerato: mentre " rette principali „ e " direzioni principali di velocità di dilatazione „ si diranno le rette speciali suddette e le loro direzioni. I parametri della terna — " parametri di velocità di dilatazione „ — sono:

$$a = a_1,\quad b = b_2,\quad c = c_3,\quad l = \frac{c_2 + b_3}{2},\quad m = \frac{a_3 + c_1}{2},\quad n = \frac{b_1 + a_2}{2};$$

dei quali i primi tre sono i moduli di dilatazione lineare secondo la direzione degli assi coordinati cui gli stessi parametri si riferiscono, e $2l, 2m, 2n$, i moduli di scorrimento dell'asse delle y, delle z e delle x rispetto all'asse delle z, delle x e delle y rispettivamente. La relativa quadrica ha la proprietà che l'inverso del quadrato d'ogni suo raggio vettore è il modulo di dilatazione lineare secondo la direzione del raggio vettore medesimo; ciò che dà luogo ad una rappresentazione geometrica della legge con cui varia il modulo di dilatazione, simile a quella che serve pel coefficiente di dilatazione, nel caso dello spostamento dislocatorio semplice estremamente piccolo (§ 102).

Finalmente, l'asse e la velocità angolare del componente rotatorio si chiamano gli elementi dello stesso nome dell'atto di movimento considerato. Le componenti della velocità angolare sono così:

$$\frac{c_2 - b_3}{2},\quad \frac{a_3 - c_1}{2},\quad \frac{b_1 - a_2}{2}.$$

Atto di movimento continuo e continuo regolare.

§ 167. — " Atto di movimento continuo „ chiamiamo quello pel quale, immaginato il sistema, al supposto istante, continuo, la velocità del suo punto qualunque è funzione continua e finita del posto del punto a quell'istante: ciò che diciamo senz'altro il punto medesimo del sistema, concepito nella sua posizione all'istante considerato. Assunta la solita terna degli assi coordinati, ciò vuol dire che le componenti u, v, w della velocità del punto qualunque sono funzioni continue e finite delle coordinate x, y, z del posto occupato dal punto qualunque all'istante considerato, ossia del punto qualunque del sistema nella sua posizione all'istante medesimo.

Quando queste funzioni ammettano anche le derivate parziali continue e finite, l'atto di movimento si dirà inoltre " regolare „.

§ 168. — Le proprietà dell'atto di movimento continuo regolare scaturiscono dai risultati che abbiamo a suo luogo ottenuti per lo spostamento così chiamato (§§ 104-108).

Così, fissato nel sistema, nella sua posizione all'istante considerato, il punto (x, y, z), per modo che ogni altro punto si possa rappresentare con $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, se (u, v, w) è la velocità corrispondente al primo punto, l'atto di movimento sarà composto dell'atto traslatorio di cui la velocità è (u, v, w): dell'atto di movimento dislocatorio semplice omogeneo tale che le componenti della velocità corrispondente al punto $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ sono:

$$\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{du}{dz}\Delta z,$$
$$\frac{dv}{dx}\Delta x + \frac{dv}{dy}\Delta y + \frac{dv}{dz}\Delta z,$$
$$\frac{dw}{dx}\Delta x + \frac{dw}{dy}\Delta y + \frac{dw}{dz}\Delta z:$$

finalmente d'un atto di movimento tale che il rapporto della grandezza della velocità del punto suddetto a quella della sua distanza da (x, y, z) svanisce con questa distanza, e per conse-

guenza, pur di considerare una parte comprendente il punto (x, y, z) racchiudibile entro una sfera abbastanza piccola, riuscirà insensibile a quei mezzi d'osservazione che pure percepiscono distinti i due punti (x, y, z) e $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Alla sua volta (§ 102), l'atto di movimento dislocatorio suddetto è composto d'un atto di movimento rotatorio coll'asse passante pel punto (x, y, z), e d'un atto di movimento dislocatorio semplice simmetrico, coll'origine nello stesso punto (x, y, z), avente comune con esso il modulo di dilatazione lineare secondo ogni direzione, il modulo di scorrimento d'ogni asse rispetto ad un altro, il modulo di dilatazione cubica; il quale è poi composto di tre atti di movimento dilatatorio normali a tre piani ortogonali passanti per la propria origine, cioè pel punto (x, y, z).

Ogni elemento dell'atto di movimento dislocatorio semplice in discorso si chiama l'elemento dello stesso nome dell'atto di movimento continuo regolare considerato „nel punto (x, y, z) „.

Così nel punto (x, y, z) vi sarà una velocità angolare le cui componenti sono:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right):$$

una terna vettoriale di velocità di dilatazione i cui parametri sono:

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right):$$

un modulo di dilatazione cubica:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Applicazione al movimento continuo regolare.

§ 169. — Sia il movimento dislocatorio semplice, per modo che le componenti ξ, η, ζ dello spostamento corrispondente al passaggio del punto qualunque del mobile dalla sua posizione

(x, y, z) al tempo t a quella al tempo qualunque $t + \Delta t$ siano date da:

$$\begin{aligned} \xi &= a + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= b + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= c + c_1 x + c_2 y + c_3 z, \end{aligned}$$

dove a, b, c, a_i, b_i, c_i, $(i = 1, 2, 3)$ sono funzioni continue differenziabili di $t + \Delta t$, il cui valore per $\Delta t = 0$ è 0.

Ne viene che le componenti u, v, w della velocità del punto qualunque in discorso al tempo t saranno date da:

$$\begin{aligned} u &= Da + Da_1 x + Da_2 y + Da_3 z \\ v &= Db + Db_1 x + Db_2 y + Db_3 z \\ w &= Dc + Dc_1 x + Dc_2 y + Dc_3 z \end{aligned}$$

dove $D = \frac{d}{dt}$.

Quindi, in primo luogo, l'atto di movimento al tempo t, cioè ad ogni istante, è dislocatorio semplice.

Confrontiamo questo atto di movimento col suddetto spostamento, variabile con Δt, secondo i risultati dei §§ 162-166 e 91-102. Vedremo subito che la velocità del componente traslatorio del primo è la velocità del movimento traslatorio la cui traslazione fra t e $t + \Delta t$ è quella del componente traslatorio dello spostamento, alla fine del tempo t: la misura della velocità angolare del componente rotatorio dell'atto di movimento e l'asse di rotazione sono il coefficiente differenziale della misura della pseudorotazione del componente pseudorotatorio dello spostamento rispetto al tempo, per $\Delta t = 0$, e il limite collo svanire di Δt dell'asse del componente pseudorotatorio medesimo: il modulo di dilatazione secondo ogni raggio, la velocità di scorrimento d'un asse rispetto ad un altro, il modulo di dilatazione cubica, e le rette principali di velocità di dilatazione del componente simmetrico dell'atto di movimento sono il coefficiente differenziale rispetto al tempo del coefficiente di dilatazione lineare secondo lo stesso raggio, dello scorrimento corrispondente agli stessi assi, del coefficiente di dilatazione cubica, per $\Delta t = 0$, e il limite collo svanire di Δt delle rette principali di dilatazione lineare del componente simmetrico dello spostamento.

Ogni elemento dell'atto di movimento al tempo t si attribuisce collo stesso nome al movimento all'istante medesimo.

§ 170. — Analogamente, ogniqualvolta il movimento è continuo regolare, l'atto di movimento ad ogni istante è del pari continuo regolare; e ogni elemento dell'atto di movimento ad un istante si attribuisce collo stesso nome al movimento a quell'istante. Che se si confronta l'atto di movimento al tempo t collo spostamento corrispondente al passaggio del sistema dalla posizione al tempo t a quello al tempo $t + \Delta t$, il calcolo diretto fornisce immediatamente le relazioni enunciate nel precedente caso fra gli stessi elementi dell'uno e dell'altro.

Funzione delle velocità.

§ 171. — "Funzione delle velocità" nel movimento continuo d'un corpo chiamiamo, quando esiste, una funzione del posto (x, y, z) del campo rappresentato dal corpo ad un istante, avente la proprietà che il suo coefficiente differenziale secondo un asse qualsivoglia è la componente secondo questo asse della velocità del punto occupante il posto (x, y, z) all'istante considerato. Perciò è necessario e sufficiente che la proprietà si verifichi per gli assi coordinati; e cioè che sia, indicando con u, v, w le componenti delle suddette velocità:

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad v = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dz}. \tag{1}$$

Alla sua volta, perchè si verifichino queste equazioni è necessario e sufficiente che abbiano luogo le relazioni:

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 0; \tag{2}$$

e cioè che al supposto istante sia nulla la velocità angolare corrispondente ad ogni punto (§§ 75, 168).

Quando la funzione delle velocità esista ad ogni istante di un intervallo di tempo, essa potrà essere funzione, oltre che delle x, y, z, esplicitamente del tempo t che definisce gli istanti medesimi.

§ 172. — Le superficie definite dall'equazione:

$$\varphi = C, \tag{1}$$

dove C è simbolo d'un parametro, e le loro trajettorie normali, le cui equazioni differenziali sono, per le (1) del § precedente:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \tag{2}$$

formano le superficie di livello e le linee di flusso corrispondenti alla velocità dei punti del mobile considerato, al supposto istante.

Moto permanente.

§ 173. — " Permanente „ si dice il movimento nel caso che la velocità d'ogni punto del mobile dipenda unicamente dal suo posto nello spazio: vale a dire quando le u, v, w sono funzioni delle sole variabili x, y, z.

Supposta l'esistenza della funzione della velocità in un intervallo di tempo, le linee di flusso, formano allora un insieme invariabile col tempo, e si riducono alle trajettorie dei punti, in quell'intervallo; come si riconosce osservando che le (2) del precedente § rappresentano nel caso in discorso il risultato della eliminazione di t dalle:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Espressioni in coordinate attuali e iniziali.

§ 174. — Ognuna delle componenti u, v, w della velocità del punto qualsivoglia d'un sistema in movimento alla fine del tempo qualunque t (e lo stesso dicasi d'ogni elemento analogo) può concepirsi a piacere o come una funzione $f(t, x, y, z)$ di t e delle coordinate del punto al tempo t, o essendo queste funzioni di t e delle coordinate x_0, y_0, z_0 del posto occupato dal

punto considerato nella posizione del sistema al tempo t_0, come una cert'altra funzione $F(t, x_0, y_0, z_0)$ di t e delle x_0, y_0, z_0.

Ora, nell'ipotesi del movimento continuo, alle x, y, z si può dare un altro significato. Supponiamo che ogni terna (x, y, z) d'un certo insieme continuo rappresenti in un intervallo di tempo, un posto occupato da un punto del mobile, non importa se diverso a seconda dell'istante dell'intervallo. Questo insieme rappresenterà uno spazio occupato nell'intervallo di tempo dal mobile, e x, y, z si potrà considerare come il suo posto qualsivoglia.

Con questo significato, mentre $F(t, x_0, y_0, z_0)$, per ogni terna x_0, y_0, z_0, si riferisce allo stesso punto del mobile, occupante col variare del tempo t posti diversi dello spazio, invece $f(t, x, y, z)$, per ogni terna x, y, z, si riferirà ad uno stesso posto dello spazio occupato col variar del tempo da punti diversi del mobile.

Comunque sia, sotto la condizione che, per ogni valore di t, le x, y, z siano le coordinate al tempo t del punto del mobile che al tempo t_0 occupa (x_0, y_0, z_0), sarà identicamente:

$$f(t, x, y, z) = F(t, x_0, y_0, z_0); \tag{1}$$

e di qui, sempre sotto quella condizione, si deduce (rammentando la relazione fra x, y, z e x_0, y_0, z_0 per ogni valore di t):

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dx}, \qquad \frac{dF}{dy} = \frac{df}{dy}, \qquad \frac{dF}{dz} = \frac{df}{dz},$$

perchè queste derivate sono prese nell'ipotesi di t costante. Invece:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{df}{dx} u + \frac{df}{dy} v + \frac{df}{dz} w.$$

Quindi, indicando con λ l'elemento in discorso, cioè il comune valore di $f(t, x, y, z)$ e $F(t, x_0, y_0, z_0)$ secondo la (1), e posto:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}, \qquad \frac{df}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t},$$

si conclude:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{d\lambda}{dx} u + \frac{d\lambda}{dy} v + \frac{d\lambda}{dz} w, \tag{2}$$

importante relazione che sarà frequentemente invocata.

Velocità nel movimento relativo.

§ 175. — Dalle equazioni

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x} + \alpha_2 \mathfrak{y} + \alpha_3 \mathfrak{z} \\ y &= \beta + \beta_1 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \beta_3 \mathfrak{z} \\ z &= \gamma + \gamma_1 \mathfrak{x} + \gamma_2 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z}, \end{aligned} \tag{1}$$

che collegano (§ 130) le coordinate x, y, z al tempo t d'un punto mobile rispetto ad una terna d'assi, colle sue coordinate $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ allo stesso tempo rispetto una terna mobile in confronto della precedente, si ricava differenziando:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha_1 \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \alpha_2 \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \alpha_3 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha_1}{dt}\mathfrak{x} + \frac{d\alpha_2}{dt}\mathfrak{y} + \frac{d\alpha_3}{dt}\mathfrak{z}; \\ \frac{dy}{dt} &= \beta_1 \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \beta_2 \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \beta_3 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt}\mathfrak{x} + \frac{d\beta_2}{dt}\mathfrak{y} + \frac{d\beta_3}{dt}\mathfrak{z}; \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma_1 \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \gamma_2 \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \gamma_3 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma_1}{dt}\mathfrak{x} + \frac{d\gamma_2}{dt}\mathfrak{y} + \frac{d\gamma_3}{dt}\mathfrak{z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{R}} &= \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x}(\mathfrak{t}) + \alpha_2 \mathfrak{y}(\mathfrak{t}) + \alpha_3 \mathfrak{z}(\mathfrak{t}) \\ y_{\mathfrak{R}} &= \beta + \beta_1 \mathfrak{x}(\mathfrak{t}) + \beta_2 \mathfrak{y}(\mathfrak{t}) + \beta_3 \mathfrak{z}(\mathfrak{t}) \\ z_{\mathfrak{R}} &= \gamma + \gamma_1 \mathfrak{x}(\mathfrak{t}) + \gamma_2 \mathfrak{y}(\mathfrak{t}) + \gamma_3 \mathfrak{z}(\mathfrak{t}), \\ x_{\mathfrak{S}} &= \alpha(\mathfrak{t}) + \alpha_1(\mathfrak{t})\mathfrak{x} + \alpha_2(\mathfrak{t})\mathfrak{y} + \alpha_3(\mathfrak{t})\mathfrak{z} \\ y_{\mathfrak{S}} &= \beta(\mathfrak{t}) + \beta_1(\mathfrak{t})\mathfrak{x} + \beta_2(\mathfrak{t})\mathfrak{y} + \beta_3(\mathfrak{t})\mathfrak{z} \\ z_{\mathfrak{S}} &= \gamma(\mathfrak{t}) + \gamma_1(\mathfrak{t})\mathfrak{x} + \gamma_2(\mathfrak{t})\mathfrak{y} + \gamma_3(\mathfrak{t})\mathfrak{z}, \end{aligned}$$

dove $\mathfrak{x}(\mathfrak{t})$ rappresenta il risultato della sostituzione di $\mathfrak{t}$ a t in $\mathfrak{x}$, e così pei simboli analoghi.

Ne viene per (2):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{dx_{\mathfrak{R}}}{d\mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} + \left(\frac{dx_{\mathfrak{S}}}{d\mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}, \\ \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{dy_{\mathfrak{R}}}{d\mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} + \left(\frac{dy_{\mathfrak{S}}}{d\mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}, \\ \frac{dz}{dt} &= \left(\frac{dz_{\mathfrak{R}}}{d\mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} + \left(\frac{dz_{\mathfrak{S}}}{d\mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}. \end{aligned} \tag{3}$$

La variabile $\mathfrak{t}$ riceve i valori proprii del tempo, e noi intenderemo che ne rappresenti il valore corrente, mentre t ne indica un valore che, scelto a piacere, si concepisce poi come fissato.

Per ogni valore di t, i punti le cui coordinate rispetto agli assi fissi sono $x_{\mathfrak{R}}$, $y_{\mathfrak{R}}$, $z_{\mathfrak{R}}$ e $x_{\mathfrak{S}}$, $y_{\mathfrak{S}}$, $z_{\mathfrak{S}}$ variano in un determinato modo al variare di $\mathfrak{t}$: per modo che sono punti mobili, contemporaneamente, se ci piace, al punto dato, determinati, (cioè di cui è determinato il movimento) ad ogni istante del movimento di esso. Li chiameremo i punti $\mathfrak{R}$ (t) e $\mathfrak{S}$ (t).

Il movimento del punto $\mathfrak{R}$ (t) è quello del punto dato relativo alla terna degli assi mobili considerati come fissi nella loro posizione al tempo t (§ 130).

E il movimento del punto $\mathfrak{S}$ (t) è quello del punto invariabilmente unito cogli assi mobili, che coincide col punto dato al tempo t. Lo chiameremo il " movimento di strascinamento del punto al tempo t ".

Per le (3) la velocità del punto dato è composta ad ogni istante delle velocità allo stesso istante dei punti $\mathfrak{R}$ (t) e $\mathfrak{S}$ (t) corrispondenti al valor t del tempo che segna l'istante medesimo: ossia è composta delle velocità allo stesso istante del suo movimento relativo alla terna degli assi mobili considerati come fissi nella loro posizione a quell'istante, e del suo movimento di strascinamento all'istante medesimo.

Immaginato il movimento del punto relativo agli assi mobili considerati come fissi in *una posizione qualsivoglia*, se $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ s'intendono coordinate rispetto a questa terna, $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ saranno le componenti della velocità al tempo t secondo gli stessi assi; per modo che, noto questo movimento relativo e il movimento degli assi mobili, si avrà subito la velocità del punto $\mathfrak{R}$ (t) per $\mathfrak{t} = t$, colla quale determinare la velocità allo stesso istante del movimento assoluto. Alla sua volta la velocità del punto $\mathfrak{R}$ (t) per $\mathfrak{t} = t$, avendo $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ per componenti secondo tre assi orientati come gli assi mobili al tempo t, fornisce immediatamente quelle del movimento relativo agli assi mobili

concepiti come fissi in una posizione qualsivoglia, bastando di considerare $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ come coordinate rispetto a questa terna.

Giova notare il caso che gli assi mobili siano in movimento traslatorio nel quale la velocità del punto $\mathfrak{M}$ (t) per $\mathfrak{t} = t$ è la velocità al tempo t del movimento del punto relativo agli assi mobili considerati come fissi in una loro posizione qualsivoglia sono tutt'uno: e tutti i punti invariabilmente congiunti cogli assi hanno ad ogni istante la stessa velocità. Ne viene che la velocità del punto ad ogni istante si può dire semplicemente composta della velocità allo stesso istante del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi in una loro posizione qualsivoglia e di quella d'un punto qualunque invariabilmente unito cogli assi: e la velocità di detto movimento relativo composta della velocità del movimento assoluto, e dell'eguale ed opposta a quella d'un punto invariabilmente unito cogli assi.

Dalle (2), moltiplicandole per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ poi per $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, quindi per $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, e ciascuna volta sommandole membro a membro, scaturisce:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_1 \frac{dz}{dt} - (\mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y})$$

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \alpha_2 \frac{dx}{dt} + \beta_2 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{dz}{dt} - (\mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{y}\mathfrak{z})$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \alpha_3 \frac{dx}{dt} + \beta_3 \frac{dy}{dt} + \gamma_3 \frac{dz}{dt} - (\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{x})$$

dove $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, hanno rispetto ad α, β, γ, α_i, β_i, γ_i, il significato del § 159; formole che, pei risultati del § 158, collimano colle precedenti conclusioni.

Condizioni della velocità a determinate superficie.

§ 176. — Sia:

$$E\,(\xi, \eta, \zeta, t) = 0 \qquad (1)$$

l'equazione d'una superficie, dove t figurerà o no secondo che la superficie medesima sarà mobile o fissa.

Supposto che in un intervallo di tempo comprendente il valor t un punto le cui coordinate al tempo t sono x, y, z appartenga a questa superficie si avrà: (cfr. § 174)

$$E\,(x, y, z, t) = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{dE}{dx}\,u + \frac{dE}{dy}\,v + \frac{dE}{dz}\,w = 0, \tag{3}$$

relazione che, se la superficie è fissa, si riduce a:

$$\frac{dE}{dx}\,u + \frac{dE}{dy}\,v + \frac{dE}{dz}\,w = 0, \tag{4}$$

esprimente che la velocità sarà parallela al pian tangente alla superficie nel punto (x, y, z).

§ 177. — Siano x, y, z le coordinate al tempo t di un certo punto d'un mobile in movimento continuo, ed esista la funzione della velocità, φ (§ 171). L'ultima equazione diventa:

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0; \tag{1}$$

dove n indica la misura del segmento di normale alla superficie in (x, y, z), presa in un certo senso, e il coefficiente differenziale si riferisce al punto (x, y, z), e s'intende volto, se la superficie si concepisce contribuire al contorno del mobile, dalla parte occupata dal mobile stesso (cfr. § 61).

§ 178. — L'ipotesi che la superficie in discorso costituisca il contorno d'un mobile in movimento continuo, o almeno ne formi una parte continua, ha particolare importanza, come a suo luogo riconosceremo anche più chiaramente.

Rammentiamo (§ 128) che se (1, § 176) è l'equazione del contorno, o d'una parte continua di esso, si verificherà, in tal caso, (2, § 176) con ogni valore di t, per tutti i punti tali che, indicando con x_0, y_0, z_0 le loro coordinate a $t = 0$, è:

$$E\,(x_0, y_0, z_0, 0) = 0. \tag{1}$$

Quindi per gli stessi punti avranno luogo (3, § 176), (4, § 176) o (1, § 176), a seconda del caso

§ 179. — Siano due mobili (o due parti d'uno stesso mobile) in movimento continuo aderenti per una superficie, che risulta

così parte comune dei loro contorni, e, col tendere d'un posto preso nell'uno o nell'altro mobile ad un posto di detta superficie, la velocità in quel posto ad un istante abbia limite diverso a seconda del corpo. Distinguendo con (u', v', w') e (u'', v'', w'') i due limiti, e intendendo che (1, § 176) sia l'equazione della superficie in discorso, abbiamo per (3, § 176):

$$\frac{dE}{dx} u' + \frac{dE}{dy} v' + \frac{dE}{dz} w' = \frac{dE}{dx} u'' + \frac{dE}{dy} v'' + \frac{dE}{dz} w'',$$

dove x, y, z sone le coordinate del punto limite, cui si sogliono concepire ugualmente attribuite le due velocità (u', v', w') e (u'', v'', w''). La qual relazione esprime che le componenti delle due velocità limiti secondo la normale alla superficie nel punto limite volta in un certo senso sono fra loro eguali.

Velocità virtuali.

§ 180. — Un sistema al quale *a priori* sono imposti dei vincoli non potrà moversi in qualsivoglia modo, ma generalmente in diversi modi: così che, se in determinate circostanze possiede un certo movimento, vi saranno altri movimenti che potrebbe possedere, rispettando i vincoli, cambiate le circostanze.

Per esempio, imposta ad un sistema la condizione della rigidità, potrà possedere qualunque movimento pel quale l'atto di movimento ad ogni istante è un atto di movimento elicoidale: imposta la condizione della rigidità e d'un punto fisso, qualunque movimento pel quale l'atto di movimento ad ogni istante è un atto rotatorio coll'asse passante per quel punto: imposta finalmente la condizione della rigidità e di due punti fissi, qualunque movimento rotatorio coll'asse passante pei due punti. E in nessuno di questi casi sarà possibile un movimento dislocatorio che implichi dilatazione o deformazione.

I vincoli imposti al sistema potranno essere invariabili col tempo (un punto fisso, un punto obbligato a trovarsi sopra una linea fissa) o variabili col tempo (un punto obbligato a trovarsi sopra una linea o superficie mobile con una certa legge). In questo

secondo caso, i vincoli fissi che si ottengono supponendo che ad un istante i supposti cessino di variare si chiamano lo stato dei vincoli medesimi a quell'istante. Per esempio, se un punto è obbligato a trovarsi sopra una superficie sferica di centro fisso e raggio variabile rappresentato da at, la sfera di raggio $a\bar{t}$ è lo stato di quel vincolo al tempo $\bar{t}$.

Ciò premesso, si chiama "velocità virtuale" d'un punto e "atto di movimento virtuale" d'un sistema "ad un istante" la velocità del punto e l'atto di movimento del sistema a quell'istante corrispondente ad ogni movimento conciliabile coi vincoli *nel loro stato all'istante considerato*, in un intervallo comprendente questo istante e del resto qualsivoglia.

Per esempio, supposto un punto obbligato a trovarsi sopra una superficie sferica di centro fisso e raggio at, sua velocità virtuale al tempo t sarà la velocità al tempo $\bar{t}$ d'ogni suo movimento per cui si mantenga sulla superficie sferica avente il centro nel supposto punto e raggio invariabile $a\bar{t}$: cioè ogni velocità parallela al pian tangente nel posto occupato dal punto al tempo $\bar{t}$.

§ 181. — Occorre in alcune questioni considerare simultaneamente la velocità d'un punto ad un istante nel movimento che effettivamente compie — velocità reale — e una sua velocità virtuale allo stesso istante.

Indicando con x, y, z le coordinate del punto al tempo t, per modo che le componenti della velocità reale al tempo t siano $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, le componenti della velocità virtuale s'indicheranno con $\delta x, \delta y, \delta z$.

Allora, per determinare $\frac{dx}{dt}$ si potrà *osservare* il movimento del punto, e il valore $x + \Delta x$ della sua ascissa ad ogni tempo $t + \Delta t$ d'un intervallo comprendente t, donde si dedurrà:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Invece, per determinare δx, puramente s'*immagina* un movimento qualunque del punto conciliabile coi suoi vincoli nello

stato al tempo t, e il valore $x + \nabla x$, che ne segue alla sua ascissa ad ogni tempo $t + \Delta t$ d'un intervallo come il suddetto, donde:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\nabla x}{\Delta t} = \delta x. \qquad (1)$$

§ 182. — Notiamo che quando i vincoli dipendono dal tempo, il movimento effettivo non sarà generalmente conciliabile coi vincoli nel loro stato ad un determinato istante: e per conseguenza la velocità reale ad un istante non risponderà alla definizione di velocità virtuale all'istante medesimo.

§ 183. — Il δx (e lo stesso dicasi naturalmente di δy, δz) ha un altro semplice significato. I successivi valori dell'ascissa del punto considerato corrispondenti ad un movimento virtuale del sistema al tempo t, conciliabili coi vincoli nel loro stato al tempo medesimo, si possono concepire, se si vuole, come un gruppo continuo di valori individuati da quello del parametro Δt, e tutti assumibili dall'ascissa del punto *al tempo t* (non più a tempi diversi) compatibilmente coi legami suddetti. In questo caso il δx definito dalla (1) del § 181 riceve il significato d'una *variazione* di quella funzione del tempo e del posto iniziale ch'è l'ascissa del punto qualunque d'un sistema in movimento, ad un istante qualsivoglia: variazione relativa al valor t del tempo, e assoggettata alle condizioni che traducono i vincoli nello stato al tempo medesimo.

§ 184. — Per quanto s'è veduto, l'atto di movimento virtuale più generale d'un sistema assoggettato alla condizione della rigidità è un atto di movimento rototraslatorio il cui asse si può far passare per un punto preso ad arbitrio.

Cioè, se il sistema di cui x, y, z sono le coordinate del punto qualsivoglia al tempo t è assoggettato alla condizione della rigidità, si ha nel caso più generale:

$$\delta x = l + qz - ry, \quad \delta y = m + rx - pz, \quad \delta z = n + py - qx,$$

dove l, m, n, p, q, r sono indipendenti da x, y, z e arbitrarii.

Notiamo che segue di qui:

$$\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} = 0:$$

relazione, la quale esprima che il modulo di dilatazione cubica (§ 164) sarà nullo in ogni punto, come infatti dev'essere.

§ 185. — Sia un punto vincolato ad appartenere, almeno in un certo intervallo di tempo, ad una superficie prefissata, o fissa o mobile, per modo da costituire un legame, a seconda del caso, invariabile o variabile col tempo.

Rappresentando l'equazione della superficie con:

$$E(\xi, \eta, \zeta, t) = 0, \qquad (1)$$

dove, se la superficie è fissa, non figurerà t, e con x, y, z le coordinate del punto al tempo t, si avrà nel supposto intervallo:

$$E(x, y, z, t) = 0 .$$

Sappiamo (§ 178) le relazioni che scaturiscono di qui per la velocità effettiva. Invece ogni velocità virtuale ad un tempo qualsivoglia dell'intervallo, che, per un momento, indicheremo con $\bar{t}$, deve riferirsi ad un movimento per cui x, y, z soddisfanno a:

$$E(x, y, z, \bar{t}) = 0 ,$$

dove $\bar{t}$ si considera come invariabile.

Si ha quindi, in ogni caso:

$$\frac{dE}{dx}\delta x + \frac{dE}{dy}\delta y + \frac{dE}{dz}\delta z = 0 ;$$

nei coefficienti della qual relazione si deve intendere che il valor del tempo sia $\bar{t}$: ma si potrà anche a $\bar{t}$ sostituire t, non occorrendo più oltre distinguere il valore corrente da un valore comunque scelto. E questa è una condizione per la velocità virtuale, la quale esprime ch'essa dev'essere parallela al pian tangente alla superficie nel posto occupato dal punto all'istante considerato.

Queste considerazioni si applicano in particolare al caso che la superficie prestabilita, fissa o no, costituisca, in parte o totalmente, il contorno d'un mobile, e x, y, z siano le coordinate d'un punto di esso al tempo qualsivoglia t.

§ 186. — Consideriamo anche il caso che due corpi, o parti d'uno stesso corpo, abbiano una superficie limitante comune, e ad un istante vi s'attribuisca un atto di movimento continuo tale che, col tendere d'un posto preso da una parte o dall'altra della superficie ad uno stesso posto della superficie medesima, il limite della velocità sia diverso a seconda della parte. In tal caso,

conformemente al § 179, s'intenderà che per un atto di movimento virtuale dell'insieme dei due corpi sia eguale il limite della componente normale della velocità medesima. Cioè, se (1, § 185) è l'equazione della superficie in discorso, e $(\delta x', \delta y', \delta z')$, $(\delta x'', \delta y'', \delta z'')$ indicano i limiti delle velocità virtuali al tempo t col tendere del posto da una parte e dall'altra al posto (x, y, z) della superficie, si stabilirà che per ogni atto di movimento virtuale sia:

$$\frac{dE}{dx}\delta x' + \frac{dE}{dy}\delta y' + \frac{dE}{dz}\delta z' = \frac{dE}{dx}\delta x'' + \frac{dE}{dy}\delta y'' + \frac{dE}{dz}\delta z'' :$$

o in altra forma:

$$v' \cos (n' v') + v'' \cos (n'' v'') = 0,$$

dove $(n' v')$, $(n'' v'')$ indicano l'angolo formato dalla normale alla superficie in (x, y, z) *volta dalle due parti* colla velocità limite nello stesso punto corrispondente all'una e all'altra parte, e v', v'' le grandezze della velocità limite medesima.

CAPITOLO IV.

ACCELERAZIONE.

Accelerazione d'un punto.

§ 187. — La velocità d'un punto a ciascuno dei tempi $t_0, t_1, t_2, \ldots$ sarà nota, data che sia al tempo t_0 la velocità stessa, e ad ogni altro tempo t_i la velocità che, per ottenere quella al tempo t_i, si deve comporre con quella al tempo t_{i-1}.

Supposto $t_i - t_{i-1} > 0$, il vettore avente per orientazione quella della suddetta velocità da comporre e per grandezza il rapporto della sua grandezza a $t_i - t_{i-1}$, si chiama l' " accelerazione media „ del punto mobile nell'intervallo di tempo che comincia con t_{i-1} e finisce con t_i.

Ne viene che la velocità ad ognuno degli istanti considerati sarà nota, data la velocità stessa ad un istante, e ad ogni altro l'accelerazione media nell'intervallo che comincia con esso e fi-

nisce col successivo, oppure che comincia col precedente e finisce con esso.

§ 188. — Chiamiamo " accelerazione „ del punto mobile all'istante corrispondente alla fine del tempo t il vettore limite collo svanire di Δt, con $\Delta t > 0$, della accelerazione media del punto stesso nell'intervallo di tempo che comincia con t e finisce con $t + \Delta t$, oppure che comincia con $t - \Delta t$ e finisce con t.

§ 189. — Immaginiamo il segmento avente per origine un punto fisso, arbitrariamente scelto, e rappresentante ad ogni istante la velocità del punto considerato. Il suo termine sarà un certo punto mobile al variare del tempo t; e, per la precedente definizione, l'accelerazione del punto considerato avrà ad ogni istante l'orientazione e la grandezza della sua velocità.

La trajettoria di questo punto si chiama l' " odografo „ del punto considerato, e si vede come permetta di determinare la sua velocità in ogni punto della trajettoria, ad ogni istante, data che sia la trajettoria medesima.

Il punto fisso si chiamerà talvolta il polo dell'odografo.

§ 190. — Supposta l'accelerazione costante, e alla sua direzione eguale ad un istante quella della velocità, questa eguaglianza si verificherà ad ogni istante; per modo che, indicando con v la misura della velocità al tempo t, la grandezza dell'accelerazione allo stesso tempo sarà $\left|\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right|$.

E poichè da

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = Costante = c$$

segue:

$$\mathrm{v} = b + ct,$$

gl'incrementi della misura della velocità sono proporzionali agli intervalli di tempo corrispondenti, e la grandezza dell'accelerazione è il valor assoluto del rapporto costante dei primi ai secondi.

Questo movimento si dice " rettilineo uniformemente accelerato „.

§ 191. — La quantità d'accelerazione è una quantità derivata la cui unità sarà, coi soliti simboli, rappresentata da $[lt^{-2}]$,

e cioè ha rispetto all'unità di lunghezza [l] dimensioni 1, e rispetto all'unità di tempo [t] dimensioni — 2. Se il moto è uniformemente accelerato questa quantità è l'incremento della quantità di velocità nell'unità di tempo; e perciò l'unità d'accelerazione corrisponde all'ipotesi d'un movimento uniformemente accelerato nel quale l'aumento della quantità di velocità in ogni unità di tempo è l'unità di velocità.

§ 192. — Indichino al solito x, y, z e u, v, w le coordinate e le componenti della velocità del punto mobile secondo tre assi cartesiani ortogonali, al tempo t.

Le componenti dell'accelerazione del punto allo stesso tempo saranno (§§ 138, 189):

$$\frac{du}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dw}{dt},$$

ossia:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

§ 193. — Da

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{v}\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{v}\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dz}{dt} = \mathrm{v}\frac{dz}{ds}$$

segue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\,\frac{dx}{ds} + \mathrm{v}^2\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\,\frac{dy}{ds} + \mathrm{v}^2\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\,\frac{dz}{ds} + \mathrm{v}^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Indichiamo con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) i coseni di direzione della tangente alla trajettoria nel punto (x, y, z) volta nel senso in cui cresce l'arco s, della normale principale volta verso il centro di curvatura, e della binormale: inoltre con ρ la grandezza del raggio di curvatura nello stesso punto (x, y, z). Sarà

$$\alpha_1 = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta_1 = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma_1 = \frac{dz}{ds},$$

$$\alpha_2 = \rho\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \beta_2 = \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \gamma_2 = \rho\frac{d^2z}{ds^2},$$

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \qquad \alpha_i\,\alpha_j + \beta_i\,\beta_j + \gamma_i\,\gamma_j = 0.$$

Per queste formole e le precedenti:

$$\alpha_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}$$
$$\alpha_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho}$$
$$\alpha_3 \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Quindi l'accelerazione ad ogni istante è parallela al piano osculatore alla trajettoria nel posto del punto mobile a quell'istante: il suo componente secondo l'asse della velocità ha per misura $\frac{d\mathrm{v}}{dt}$, ed ha quindi il senso della velocità o l'opposto secondo che $\frac{d|\mathrm{v}|}{dt}$ è positivo o negativo, cioè secondo che, pel considerato valore di t, $|\mathrm{v}|$ è crescente o decrescente: il suo componente secondo la normale principale volta verso il centro di curvatura ha per misura $\frac{\mathrm{v}^2}{\rho}$, numero positivo, per modo che il suo senso sarà sempre verso il centro di curvatura.

Questi vettori si chiamano l' „accelerazione tangenziale „ e l' „accelerazione centripeta „ del punto all'istante considerato.

§ 194. — Data la posizione e la velocità del punto mobile ad un istante, per esempio al tempo zero, e l'accelerazione ad ogni altro istante corrispondente al tempo qualsivoglia t, nell'ipotesi che l'accelerazione risulti funzione continua e finita di t nell'intervallo considerato, il movimento del punto sarà determinato.

Difatti, indicando con X, Y, Z le componenti dell'accelerazione del punto al tempo t, e del resto mantenendo i soliti simboli, da

$$\frac{du}{dt} = X, \qquad \frac{dv}{dt} = Y, \qquad \frac{dw}{dt} = Z \qquad (1)$$
$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w$$

colla condizione:

$$t = 0: \begin{cases} u = u_0, & v = v_0, & w = w_0 \\ x = x_0, & y = y_0, & z = z_0, \end{cases} \qquad (2)$$

segue:

$$u = u_0 + \int_0^t X\,dt, \quad v = v_0 + \int_0^t Y\,dt, \quad w = w_0 + \int_0^t Z\,dt$$

$$x = x_0 + u_0 t + \int_0^t dt \int_0^t X\,dt$$

$$y = y_0 + v_0 t + \int_0^t dt \int_0^t Y\,dt$$

$$z = z_0 + w_0 t + \int_0^t dt \int_0^t Z\,dt.$$

Qui s'intende che X, Y, Z siano funzioni esplicite di t. Ma più generalmente possiamo anche supporre che l'accelerazione del punto considerato sia funzione del tempo t composta colla stessa t e colle u, v, w, x, y, z, valori delle componenti della velocità e delle coordinate del punto al tempo t.

Al sistema (1) di sei equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine corrisponderà il sistema d'equazioni integrali:

$$F_i\,(t, x, y, z, u, v, w, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

dove C_1, C_2,... C_6 rappresentano sei costanti arbitrarie. E queste costanti, in virtù delle condizioni (2), saranno determinate dal sistema d'equazioni:

$$F_i\,(0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Più generalmente ancora, possiamo supporre X, Y, Z funzioni di t e inoltre delle coordinate e delle componenti della velocità al tempo t del punto che si considera e d'altri $n - 1$ punto, di ciascun dei quali è data allo stesso modo l'accelerazione al tempo qualunque t, e al tempo $t = 0$ la posizione e la velocità. Si avrà allora un sistema di $6n$ equazioni differenziali alle derivate ordinarie del 1° ordine, cui corrisponderà un sistema di equazioni integrali fra t, le coordinate e le componenti della velocità degli n punti, e $6n$ costanti arbitrarie, per determinare le

quali serviranno le equazioni che se ne ricavano (in base alla condizione per $t = 0$) facendovi $t = 0$.

Finalmente, concepito il punto x, y, z come punto qualunque d'un corpo continuo, individuato dalla sua posizione (x_0, y_0, z_0) per $t = 0$, e per conseguenza x, y, z e u, v, w funzioni continue e finite di t nell'intervallo relativo al movimento e di x_0, y_0, z_0 nel campo rappresentato dal corpo nello stato corrispondente a $t = 0$, potremo supporre X, Y, Z funzioni finite e continue di $t, x_0, y_0, z_0, x, y, z, u, v, w, \frac{dx}{dx_0}, \ldots \frac{du}{dx_0} \ldots \frac{d^2 x}{dx_0^2}, \ldots$ E in tal caso le (1) saranno un sistema di sei equazioni differenziali alle derivate parziali del 1° ordine per rispetto alla variabile t, assoggettate alle condizioni di tempo (2).

Notiamo che le componenti della velocità si possono immediatamente eliminare, per ottenere un sistema d'equazioni differenziali dove le *incognite* sono le sole coordinate: il quale risulterà composto di un numero d'equazioni metà del precedente, ma sarà, per rispetto a t, del 2° ordine.

Queste equazioni differenziali sono quelle che comunemente si sogliono chiamare le " equazioni del movimento " del punto, o del sistema di punti, o del corpo continuo considerato.

§ 195. — Questo complesso di proprietà dell'accelerazione servirà a mettere in evidenza il suo ufficio nella Cinematica.

Il termine di accelerazione trova chiaramente la sua ragione nel movimento uniformemente accelerato (§ 190), dove l'accelerazione costante fornisce la naturale misura della rapidità con cui varia la velocità col tempo. Il passaggio al concetto dell'accelerazione ad un istante è analogo al passaggio a quello di velocità ad un istante, e simili considerazioni si possono fare in proposito (§ 142).

Alla Dinamica spetta mettere in piena luce l'importanza di questo elemento del moto. Difatti la definizione dei movimenti *che si presentano in Natura* mediante l'accelerazione riesce generalmente ad un tempo la più semplice e quella che riunisce un maggior numero di proprietà comuni ai movimenti medesimi: e le stesse leggi fondamentali del movimento dei corpi naturali, nella loro forma più semplice, risultano proprietà dell'accelerazione.

Movimento parabolico.

§ 196. — Sia l'accelerazione costante.

Assumiamo l'asse delle z orientato come l'accelerazione: per origine il posto del punto mobile per $t = 0$: il piano xz parallelo alla velocità del punto medesimo a quell'istante.

Con ciò:

$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = g$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$t = 0: \begin{cases} u = u_0 & v = 0 & w = w_0 \\ x = 0 & y = 0 & z = 0. \end{cases}$$

Quindi:

$$u = u_0, \qquad v = 0, \qquad w = w_0 + gt \tag{1}$$

$$x = u_0 t, \quad y = 0, \quad z = w_0 t + \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Dalla prima e dalla seconda delle (1) segue che l'odografo è la retta parallela all'accelerazione nel semipiano terminato alla parallela all'accelerazione passante pel polo orientato secondo la velocità iniziale, alla distanza $|u_0|$ dal polo medesimo.

Sia in primo luogo $|u_0| > 0$, per modo che, posto $u_0 = a \cos\alpha$, $w_0 = a \sin\alpha$, siano a e $\cos\alpha$ diversi da 0, cioè la velocità iniziale nè nulla nè parallela all'accelerazione. Per le (2) la trajettoria è la linea del piano passante pel posto iniziale, parallelo alla velocità iniziale, la cui equazione in questo piano — preso il posto iniziale per origine, e orientato l'asse delle z come l'accelerazione — è:

$$z = \tan\alpha \, x + \frac{1}{2}(1 + \tan^2\alpha) \frac{gx^2}{a^2}, \tag{3}$$

cioè una parabola coll'asse orientato come l'accelerazione.

Per misura della velocità al tempo t le (1) dànno:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{u_0^2 + (w_0 + gt)^2}, \tag{4}$$

numero sempre diverso da zero, per modo che il senso della velocità, ossia quello del movimento, non potrà in uno stesso posto a istanti diversi essere diverso: e stabilito che l'arco s cresca nel senso del movimento, si dovrà attribuire al radicale il segno $+$.

Il vertice della parabola corrisponde per la terza della (2) al valor t per cui $w_0 + gt = 0$. Assumendolo per origine dell'arco s, da (4) segue:

$$s = \int_{-\frac{w_0}{g}}^{t} \sqrt{u_0^2 + (w_0 + gt)^2}\, dt$$

$$= \frac{w_0 + gt}{2g} \sqrt{u_0^2 + (w_0 + gt)^2} + \frac{u_0^2}{2g} \log \frac{w_0 + gt + \sqrt{u_0^2 + (w_0 + gt)^2}}{u_0},$$

equazione del movimento sulla trajettoria.

Notiamo che se s'intende che con $t = 0$ il movimento effettivamente *cominci*, vale a dire che non corrispondano posizioni del mobile a valori negativi di t, la trajettoria sarà l'arco di parabola rappresentato dalla (3) colla condizione $x \geqq 0$ oppure $x \leqq 0$ secondo che è $u_0 > 0$ o < 0, e il vertice apparterrà o no a quest'arco secondo che è $w_0 \leqq 0$ o $w_0 > 0$, cioè secondo che la velocità iniziale formerà o non formerà coll'accelerazione un angolo ottuso.

Ora supponiamo $u_0 = 0$, cioè la velocità iniziale o nulla o diretta come l'accelerazione.

Le prime due delle (2), che diventano $x = 0$ $y = 0$, mostrano che la trajettoria sarà una retta parallela all'accelerazione.

Per misura della velocità le (1) danno:

$$\pm (w_0 + gt)$$

dove si deve assumere $+$ se il segmento s di trajettoria cresce nel senso dell'accelerazione (poichè allora $\frac{ds}{dt} = \frac{dz}{dt} = w$): e ciò stabilito, la misura in discorso sarà negativa, nulla, o positiva, secondo che è $t <, =$ oppure $> -\frac{w_0}{g}$, per modo che la velocità nel primo caso avrà senso opposto e nel terzo senso concorde a quello dell'accelerazione.

Fissato inoltre che l'origine del suddetto segmento sia il posto per cui $w = 0$, cioè la velocità nulla, abbiamo:

$$s = \frac{w_0^2}{2g} + w_0\, t + \frac{1}{2} g t^2,$$

equazione del movimento sulla trajettoria nel presente caso.

Vediamo così che, nel caso stesso, il movimento è rettilineo uniformemente accelerato.

Nel caso precedente, per le (2), il movimento si può concepire composto di questi due (§§ 115, 116): l'uno, un movimento rettilineo uniformemente accelerato come il suddetto, ove la velocità iniziale è il componente della velocità iniziale del movimento considerato secondo un asse diretto come l'accelerazione; l'altro, un movimento rettilineo uniforme avente comune col precedente e col dato il posto iniziale, la cui velocità è il componente della velocità iniziale secondo un piano perpendicolare all'accelerazione: per modo che la trajettoria sarà la perpendicolare all'accelerazione passante pel posto iniziale, posta nel piano parallelo all'accelerazione e alla velocità iniziale, e il senso quello di essa che forma con detta velocità un angolo acuto.

Movimento centrale.

§ 197. — Supponiamo che la retta descritta per ogni posto del punto mobile nella direzione della sua accelerazione in quel posto passi costantemente per un punto fisso " centro "; o come si suol dire, che l'accelerazione del punto sia costantemente diretta verso un punto fisso.

La trajettoria sarà una linea piana, perchè il piano osculatore in ogni punto, contenendo la parallela descritta pel punto all'accelerazione (§ 193), dovrà passare pel centro, cioè per un punto fisso; e un piano che contenga il centro e sia parallelo alla velocità del punto ad un istante sarà il piano della trajettoria medesima.

Ciò premesso, assumiamo il centro per origine, e il piano xy contenga la trajettoria.

Sarà costantemente $z = 0$.

Per quanto ad x, y, indicando con r la grandezza della distanza del punto dal centro, e con R quella della sua accelerazione al tempo t, abbiamo:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \pm R \frac{x}{r}, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = \pm R \frac{y}{r}, \tag{1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

dove va preso + o — secondo che l'accelerazione ha il senso del raggio descritto dal centro al posto oppure il senso contrario. Inoltre debbono verificarsi le condizioni:

$$t = 0: \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad \frac{d x}{d t} = u_0, \quad \frac{d y}{d t} = y_0. \tag{3}$$

Dalle (1) si deduce immediatamente:

$$x \frac{d^2 y}{d t^2} - y \frac{d^2 x}{d t^2} = 0,$$

cioè:

$$\frac{d}{d t}\left(x \frac{d y}{d t} - y \frac{d x}{d t} \right) = 0:$$

per modo che, indicando con A una costante:

$$x \frac{d y}{d t} - y \frac{d x}{d t} = A, \tag{4}$$

e per (3):

$$x_0 v_0 - y_0 w_0 = A, \tag{5}$$

con che A riesce determinata.

Notiamo che, indicando con r_0, v_0, le grandezze della distanza del punto dal centro e della velocità, e con φ_0 la misura dell'angolo formato dalla velocità del punto col raggio vettore, crescente nel senso positivo, per $t = 0$, si ha:

$$A = r_0 \, \mathrm{v}_0 \sin \varphi_0. \tag{5}$$

La (4) è una prima equazione integrale delle (1), che sta senz'altre ipotesi su R. Essa esprime che " il momento del vettore applicato di cui il vettore è la velocità del punto mobile ad un istante qualsivoglia e il punto d'applicazione il posto del punto mobile allo stesso istante — ciò che si chiama il " mo-

mento della velocità del punto mobile „ — per rispetto al centro è costante „. Donde segue che, se A non è o, la velocità in uno stesso posto non può, a diversi istanti, cambiar di senso, e il senso del movimento del punto sarà costantemente lo stesso.

Integrando, nello stesso caso, se ne ricava:

$$\int_0^t (x\,dy - y\,dx) = A\,t:$$

e per conseguenza: “ l'area descritta dal raggio condotto dal centro al punto mobile è proporzionale al tempo impiegato a descriverla „.

L'ipotesi $A = 0$ significa, per (5), la velocità del punto, ad un istante, nulla o diretta verso il centro, o il punto nel centro.

Segue immediatamente da (4), in questo caso:

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0},$$

cioè la trajettoria una retta passante pel centro.

Nella trattazione seguente sarà sempre supposto A diverso da o.

§ 198. — Ora limitiamo la generalità, e supponiamo R funzione della sola r, cioè della distanza del punto mobile dal centro.

Dalle (1) del precedente §, tenuto calcolo di (2):

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \pm R\frac{dr}{dt},$$

cioè:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = \pm R\frac{dr}{dt}.$$

Quindi, indicando, come precedentemente, con v_0, r_0 le grandezze della velocità e della distanza del punto dal centro per $t = 0$:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2 \pm 2\int_{r_0}^{r} R\,dr, \tag{1}$$

$$v_0^2 = u_0^2 + v_0^2, \qquad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \tag{2}$$

Questa è una seconda equazione integrale delle suddette equazioni differenziali: dalle quali emerge che la grandezza della velocità del punto mobile è funzione della sua distanza dal centro.

Per trovare i rimanenti, giova ricorrere alle coordinate polari. Assunto il centro per polo, r è il raggio vettore del punto mobile; indichi θ l'angolo, preso per asse polare l'asse delle x positive, e supposto, al solito, che cresca nel senso del giro conducente per l'angolo retto all'asse delle y. Si ha:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta , & y &= r \sin\theta , \\ x_0 &= r_0 \cos\theta_0, & y_0 &= r_0 \sin\theta_0, \end{aligned} \tag{3}$$

per mezzo delle quali la (4, § 197), e la (1) si trasformano in

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = A,^* \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = v_0^2 \pm 2 \int_{r_0}^{r} R\, dr.$$

Di qui:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{A^2}{r^2} = v_0^2 \pm 2 \int_{r_0}^{r} R\, dr,$$

donde:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 \pm 2 \int_{r_0}^{r} R\, dr - \frac{A^2}{r^2}}}, \qquad d\theta = \frac{A}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 \pm 2 \int_{r_0}^{r} R\, dr - \frac{A^2}{r^2}}},$$

dove il radicale si deve intendere fornito del doppio segno.

Dalla seconda:

$$\theta - \theta_0 = A \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 \pm 2 \int_{r_0}^{r} R\, dr - \frac{A^2}{r^2}}}, \tag{4}$$

equazione in coordinate polari della trajettoria.

E dalla prima:

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 \pm 2 \int_{r_0}^{r} R\, dr - \frac{A^2}{r^2}}} = \frac{1}{A} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2\, d\theta, \tag{5}$$

---

* Questa forma sta in generale; e risultandone che $\frac{d\theta}{dt}$ non può annullarsi per alcun valore di t, se A non è 0, ne emerge che θ sarà sempre crescente o decrescente, cioè il movimento del punto, costantemente in un senso, come s'è notato (§ 197), positivo o negativo secondo il segno di A.

dove, nel terzo membro, si deve intendere eliminato r mediante la precedente equazione: la quale fornisce l'equazione del movimento sulla trajettoria.

Queste, tenuto calcolo delle (3), sono la terza e la quarta equazione integrale delle (1, § 197), con quei valori delle costanti che sono conformi alle (2, § 197).

§ 199. — Supponiamo $R = \frac{\varkappa^2}{r^2}$, dove $\varkappa^2$ rappresenta una costante: cioè la grandezza dell'accelerazione ad ogni istante inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto mobile dal centro all'istante medesimo.

In questo caso:

$$\int_{r_0}^{r} R\, dr = \frac{\varkappa^2}{r_0} - \frac{\varkappa^2}{r}.$$

Poniamo:

$$\frac{1}{A^2}\left(v_0^2 \pm \frac{2\varkappa^2}{r_0}\right) = a, \qquad \mp \frac{\varkappa^2}{A^2} = b. \tag{1}$$

Con ciò:

$$\sqrt{v_0^2 \pm 2\int_{r_0}^{r} R\, dr - \frac{A^2}{r^2}} = A\sqrt{a + 2b\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}} =$$

$$= A\sqrt{a+b^2}\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{1}{r} - b}{\sqrt{a+b^2}}\right)^2},$$

dove, nel terzo membro, il primo radicale s'intenderà positivo; e notiamo ch'è reale. Difatti per (5, § 197):

$$a + b^2 = \left(\frac{\varkappa^2}{A^2} \pm \frac{1}{r_0}\right)^2 + \frac{v_0^2}{A^2}\cos^2\varphi_0 .$$

Quindi:

$$\theta - \theta_0 = -\int_{r_0}^{r} \frac{d\,\dfrac{\frac{1}{r} - b}{\sqrt{a+b^2}}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\frac{1}{r} - b}{\sqrt{a+b^2}}\right)^2}} .$$

Di qui, col segno + del radicale:

$$\theta - \theta_0 = \left| \left(\arccos \frac{\frac{1}{r} - b}{\sqrt{a + b^2}} \right) \right|_{r_0}^{r}, \tag{2}$$

distinguendo colle parentesi il valore di arcos compreso fra zero e π; e col segno $-$:

$$\theta - \theta_0 = - \left| \left(\arccos \frac{\frac{1}{r} - b}{\sqrt{a + b^2}} \right) \right|_{r_0}^{r}. \tag{2'}$$

E per conseguenza, con θ in un intervallo compreso fra $-\pi$ e π:

$$\frac{1}{r} = b + \sqrt{a + b^2} \cos (\theta - \Theta), \tag{3}$$

dove la costante Θ è da concepire determinata dall' equazione:

$$\frac{1}{r_0} = b + \sqrt{a + b^2} \cos (\theta_0 - \Theta).$$

Questa è l'equazione in coordinate polari della trajettoria. Poniamola sotto la forma:

$$r = \frac{1}{b} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{a}{b^2}} \cos (\theta - \Theta)},$$

e confrontiamola con

$$r = \mp \frac{p}{2} \frac{1}{1 + e \cos \theta},$$

dove p ed e sono costanti positive.

La linea di cui questa è l'equazione in coordinate polari è in ogni caso una conica (nel caso dell'iperbola, un ramo) di cui p è il parametro, ed e l' eccentricità, assunto per polo uno dei fochi, e l'asse focale per asse polare.

Nel caso del $-$, supposto $e > 1$, la linea è un ramo d'iperbola, il polo è il foco esterno, e l'asse polare ha il senso corrispondente al passaggio dal centro a questo foco.

Nel caso del $+$, secondo che è $e < 1$, $e = 1$ o $e > 1$, la linea è un' ellisse, una parabola, o un ramo d'iperbola di cui il

polo è il foco interno, e l'asse polare ha il senso corrispondente al passaggio dal foco al vertice più vicino.

Per (1) concludiamo che la trajettoria del nostro punto sarà un arco di conica, di cui il centro dell'accelerazione è un foco, il parametro è $\mp \frac{2}{b} = \frac{2A^2}{\varkappa^2}$, l'eccentricità è e, e l'asse dei fochi, col debito senso, forma col supposto asse polare l'angolo Θ.

Nel caso dell'accelerazione divergente dal centro (segni superiori), la linea suddetta è un ramo d'iperbola, di cui il centro dell'accelerazione è il foco esterno.

Nel caso dell'accelerazione convergente al centro (segni inferiori), essendo:

$$e^2 = 1 - \frac{A^2}{\varkappa^2}\left(\frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\varkappa^2}\right),$$

la linea sarà un'ellisse, una parabola o un ramo d'iperbola, di cui il centro dell'accelerazione è il foco interno, secondo che:

$$v_0^2 < \frac{2\varkappa^2}{r_0}, \qquad v_0^2 = \frac{2\varkappa^2}{r_0}, \qquad v_0^2 > \frac{2\varkappa^2}{r_0}.$$

Venendo a (5, § 198), distinguiamo, per considerarlo in seguito, il caso di $a = 0$. Supposto $|a| > 0$, abbiamo:

$$\sqrt{a + 2b\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{ar^2 + 2br - 1} =$$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{\sqrt{a + b^2}}{\sqrt{\pm a}}\sqrt{\pm\left(\frac{ar + b}{\sqrt{a + b^2}}\right)^2 \mp 1},$$

dove va preso il segno superiore o l'inferiore secondo che è $a > 0$ o $a < 0$.

Quindi:

$$t = \frac{\sqrt{\pm a}}{A\sqrt{a + b^2}}\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{\pm\left(\frac{ar + b}{\sqrt{a + b^2}}\right)^2 \mp 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{a + b^2}}{A(\pm a)^{\frac{3}{2}}}\int_{r_0}^{r}\frac{\frac{ar + b}{\sqrt{a + b^2}}\,d\frac{ar + b}{\sqrt{a + b^2}}}{\sqrt{\pm\left(\frac{ar + b}{\sqrt{a + b^2}}\right)^2 \mp 1}} - \frac{b}{A(\pm a)^{\frac{3}{2}}}\int_{r_0}^{r}\frac{d\frac{ar + b}{\sqrt{a + b^2}}}{\sqrt{\pm\left(\frac{ar + b}{\sqrt{a + b^2}}\right)^2 \mp 1}}.$$

Integrando, ne viene, nel caso dei segni superiori, cioè della trajettoria iperbolica:

$$t = \frac{1}{Aa} \Bigg|_{r_0}^{r} \sqrt{ar^2 + 2br - 1} - \frac{b}{A a^{\frac{3}{2}}} \log \frac{ar + b + \sqrt{ar^2 + br - 1}}{ar_0 + b + \sqrt{ar_0^2 + br_0 - 1}},$$

dove il segno + e — del radicale corrisponde all'arco (2) *e* (2)' della trajettoria rispettivamente.

E nel caso dei segni inferiori, cioè dell'ellisse:

$$t = \frac{1}{Aa} \Bigg|_{r_0}^{r} \sqrt{ar^2 + 2br - 1} + \frac{b}{A(-a)^{\frac{3}{2}}} \Bigg|_{r_0}^{r} \operatorname{arcos} \frac{ar + b}{\sqrt{a + b^2}},$$

dove di arcos va preso il valore tra o e π o fra o e $-\pi$, secondo che il segno del radicale è + o —, per modo che si ha ancora un'equazione per ciascuno dei due archi suddetti.

Queste sono due relazioni trascendenti fra r e t.

Nel caso che sia $a = 0$, cioè la trajettoria parabolica, abbiamo semplicemente:

$$t = \frac{1}{A} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2b\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}} = \frac{1}{A} \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2br - 1}}.$$

Ora, ponendo:

$$\sqrt{2br - 1} = \rho,$$

si ha:

$$\frac{b\,dr}{\sqrt{2br - 1}} = d\rho, \qquad r = \frac{1 + \rho^2}{2b}.$$

Quindi:

$$t = \frac{1}{2Ab^2} \Bigg|_{\sqrt{2br_0 - 1}}^{\sqrt{2br - 1}} \rho\left(1 + \frac{1}{3}\rho^2\right),$$

semplice relazione algebrica.

Valendosi di (3) da queste relazioni si dedurranno le corrispondenti fra 0 e t.

§ 200. — Coll'ipotesi $R = \frac{\varkappa^2}{r^2}$ le (1, § 197) diventano:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \pm \frac{\varkappa^2 x}{r^3}, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = \pm \frac{\varkappa^2 y}{r^3}: \tag{1}$$

e il precedente § mostra come si determinano le quattro equazioni integrali di questa coppia d'equazioni differenziali del 2° ordine.

Due equazioni integrali, che insieme, per esempio, con (4, § 197) e (1, § 198), costituiscono il sistema completo delle equazioni integrali si possono dedurre nel seguente modo.

Dalla prima delle (1) si ricava, valendosi di (4, § 197):

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \pm \frac{\varkappa^2}{A} \frac{x^2 \frac{d y}{d t} - x y \frac{d x}{d t}}{r^3} = \pm \frac{\varkappa^2}{A} \frac{(x^2 + y^2) \frac{d y}{d t} - y\left(x \frac{d x}{d t} + y \frac{d y}{d t}\right)}{r^3}$$

$$= \pm \frac{\varkappa^2}{A} \frac{r \frac{d y}{d t} - y \frac{d r}{d t}}{r^2} = \pm \frac{\varkappa^2}{A} \frac{d \frac{y}{r}}{d t};$$

e integrando:

$$\frac{d x}{d t} = \alpha \pm \frac{\varkappa^2}{A} \frac{y}{r}, \tag{2}$$

dove, conformemente alle (3, § 197) si deve porre

$$\alpha = u_0 \mp \frac{\varkappa^2}{A} \frac{y_0}{r_0}.$$

Analogamente:

$$\frac{d y}{d t} = \beta \mp \frac{\varkappa^2}{A} \frac{x}{r}, \tag{3}$$

dove, conformemente alle stesse (3, § 197):

$$\beta = v_0 \pm \frac{\varkappa^2}{A} \frac{x_0}{r_0}.$$

Le (2), (3) sono le equazioni integrali in discorso.

Da esse si ricava immediatamente:

$$\left(\frac{d x}{d t} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{d y}{d t} - \beta\right)^2 = \frac{\varkappa^4}{A^2}:$$

equazione dell'odografo — presa per pólo l'origine delle coordinate — il quale risulta una circonferenza di circolo di raggio $\frac{\varkappa^2}{|A|}$, col centro nel punto (α, β) (cfr. § 189).

Accelerazione nel movimento relativo.

§ 201. — Col significato dei simboli precedentemente stabilito (§ 158, § 175), otteniamo differenziando rispetto a t le (2, § 175), e valendoci del procedimento adoperato per dedurre le (7, § 158):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{d t^2} &= \left(\frac{d^2 x_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t} + \left(\frac{d^2 x_{\mathfrak{S}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t} + 2\left(q\left(\frac{d z_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} - r\left(\frac{d y_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}\right) \\
\frac{d^2 y}{d t^2} &= \left(\frac{d^2 y_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t} + \left(\frac{d^2 y_{\mathfrak{S}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t} + 2\left(r\left(\frac{d x_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} - p\left(\frac{d z_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}\right) \quad (1) \\
\frac{d^2 z}{d t^2} &= \left(\frac{d^2 z_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t} + \left(\frac{d^2 z_{\mathfrak{S}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t} + 2\left(p\left(\frac{d y_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} - q\left(\frac{d x_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}\right)
\end{aligned}$$

Ora

$$\left(\frac{d^2 x_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t}, \quad \left(\frac{d^2 y_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t}, \quad \left(\frac{d^2 z_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t}$$

sono le componenti dell'accelerazione del punto $\mathfrak{R}$ (t) per $\mathfrak{t} = t$ (§ 175):

$$\left(\frac{d^2 x_{\mathfrak{S}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t}, \quad \left(\frac{d^2 y_{\mathfrak{S}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t}, \quad \left(\frac{d^2 z_{\mathfrak{S}}}{d \mathfrak{t}^2}\right)_{\mathfrak{t}=t}$$

quelle del punto $\mathfrak{S}$ (t) egualmente per $\mathfrak{t} = t$: finalmente,

$$2\left(r\left(\frac{d y_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} - q\left(\frac{d z_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}\right),$$

$$2\left(p\left(\frac{d z_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} - r\left(\frac{d x_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}\right),$$

$$2\left(q\left(\frac{d x_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t} - p\left(\frac{d y_{\mathfrak{R}}}{d \mathfrak{t}}\right)_{\mathfrak{t}=t}\right),$$

quelle d'un terzo vettore la cui unità ha le stesse dimensioni di quella dell'accelerazione, il quale, per ragioni che emergeranno in seguito, si chiama " accelerazione centrifuga composta ".

Osserviamo che ad ogni istante, corrispondente al tempo qualsivoglia t, la misura di questo vettore è il doppio prodotto delle misure della velocità del punto $\mathfrak{R}$ (t) per $\mathfrak{t} = t$ e della

velocità angolare dell'atto rotatorio degli assi mobili pel seno dell'angolo dei loro assi: che se quest'angolo è nullo o due retti, essa risulta zero, e diversamente, l'asse è perpendicolare al piano degli assi dei due suddetti vettori, volto nel senso positivo rispetto al giro che conduce per l'angolo medesimo dall'asse del primo a quello del secondo.

Per (1) l'accelerazione del punto dato ad ogni istante è composta delle accelerazioni allo stesso istante dei punti $\mathfrak{R}(t)$ e $\mathfrak{S}(t)$ corrispondenti al valor t del tempo che segna l'istante considerato — cioè dell'accelerazione allo stesso istante del suo movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi nella loro posizione a quell'istante, e del suo movimento di strascinamento all'istante medesimo — ed inoltre del vettore eguale ed opposto all'accelerazione centrifuga composta. Questo è il " teorema di *Coriolis* ".

Si ha:

$$\left(\frac{d^2 x_{\mathfrak{R}}}{d\mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} = \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2}\alpha_1 + \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2}\alpha_2 + \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2}\alpha_3$$

$$\left(\frac{d^2 y_{\mathfrak{R}}}{d\mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} = \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2}\beta_1 + \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2}\beta_2 + \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2}\beta_3$$

$$\left(\frac{d^2 z_{\mathfrak{R}}}{d\mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} = \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2}\gamma_1 + \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2}\gamma_2 + \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2}\gamma_3 .$$

D'altra parte, immaginato, il movimento del punto relativo agli assi mobili considerati come fissi *in una posizione qualsivoglia,* se $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ s'intendono coordinate rispetto a questi assi, $\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt}, \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2}, \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2}$ sono le componenti dell'accelerazione di detto movimento relativo secondo gli stessi assi, non altrimenti che $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \frac{d\mathfrak{y}}{dt}, \frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ sono le componenti della velocità (§ 175).

Quindi, nota l'accelerazione del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi in una posizione qualsivoglia e il moto degli stessi assi si ha immediatamente l'accelerazione ad ogni istante del punto $\mathfrak{R}(t)$ per $\mathrm{t} = t$, qualunque sia il valore di t.

Alla sua volta, l'accelerazione del punto $\mathfrak{M}\ (t)$ per $\mathfrak{t} = t$ fornisce senz'altro quella del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi in una posizione qualunque, allo stesso tempo t. E pei precedenti risultati, l'accelerazione del punto $\mathfrak{M}\ (t)$ per $\mathfrak{t} = t$ è composta dell'accelerazione del movimento effettivo allo stesso istante, dell'accelerazione del movimento eguale ed opposto a quello di strascinamento, e dell'accelerazione centrifuga: altra forma del teorema di *Coriolis*. Ciò si traduce nelle equazioni:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} &= \mathfrak{X} - \mathfrak{X}_\mathfrak{s} + 2\left(\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{y}}{dt} - \mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)\\ \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} &= \mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}_\mathfrak{s} + 2\left(\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{z}}{dt} - \mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)\\ \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} &= \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_\mathfrak{s} + 2\left(\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} - \mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right),\end{aligned} \qquad (2)$$

dove $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{X}_\mathfrak{s}$, $\mathfrak{Y}_\mathfrak{s}$, $\mathfrak{Z}_\mathfrak{s}$ rappresentano le componenti dell'accelerazione del movimento effettivo e quelle del movimento di strascinamento all'istante considerato secondo tre assi aventi l'orientazione degli assi mobili all'istante medesimo, mentre $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ conservano il significato di componenti secondo gli stessi assi della velocità angolare dell'atto rotatorio degli assi mobili (§ 159).

Queste sono le così dette " equazioni del movimento relativo ad una terna d'assi mobili considerati come fissi „ e cioè del movimento del punto considerato com'è percepito da un osservatore che partecipa al movimento degli assi (§ 133).

§ **202.** — Nel caso che il movimento degli assi sia traslatorio (cfr. § 175) l'accelerazione del punto $\mathfrak{M}\ (t)$ per $\mathfrak{t} = t$ e del movimento relativo agli assi considerati come fissi in una loro posizione qualunque sono tutt'uno: l'accelerazione del movimento di strascinamento all'istante considerato si riduce a quella di un punto qualunque invariabilmente unito cogli assi, per esempio, la loro origine: inoltre, l'accelerazione centrifuga è nulla; per modo che l'accelerazione del punto dato, semplicemente composta delle prime due: e l'accelerazione del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi, composta dell'accelerazione

del movimento effettivo e dell'eguale ed opposta all'accelerazione d'un punto qualunque invariabilmente unito cogli assi mobili.

§ 203. — Un altro caso importante è quello che uno degli assi della terna mobile sia fisso, e il movimento degli altri due rotatorio uniforme col primo come asse. In tal caso la trajettoria del punto $\mathfrak{S}(t)$ è la circonferenza di circolo col centro sull'asse fisso, e il piano ad esso perpendicolare, passante pel posto del punto al tempo t; e la sua accelerazione, riducendosi alla componente centripeta (§ 192), ha orientazione eguale ed opposta a quella del raggio descritto dal centro al posto del punto al supposto istante, e per grandezza il prodotto di quelle del raggio, cioè della distanza del punto dall'asse fisso all'istante considerato, e del quadrato della velocità angolare. Il vettore eguale ed opposto si chiama l' " accelerazione centrifuga ", da non confondersi coll'accelerazione centrifuga composta.

Così, nel caso in discorso, l' accelerazione del punto $\mathfrak{N}(t)$ per $\mathfrak{t} = t$, che fornisce immediatamente, come abbiamo veduto, l'accelerazione al tempo t del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi in una posizione qualunque, è composta dell'accelerazione del movimento effettivo allo stesso istante, dell'accelerazione centrifuga, e dell'accelerazione centrifuga composta.

Supposto che l'asse fisso della terna mobile sia l'asse delle $\mathfrak{z}$, le componenti secondo tre assi aventi l'orientazione di questi al tempo t dell'accelerazione centrifuga saranno $\omega^2 \mathfrak{x}$, $\omega^2 \mathfrak{y}$, o, e quelle dell'accelerazione centrifuga composta, indicando con ω la misura della velocità angolare del movimento rotatorio della coppia $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, $2\omega \frac{d\mathfrak{y}}{dt}$, $-2\omega \frac{d\mathfrak{x}}{dt}$, o. Quindi le (2, § 201) si riducono nel presente caso a:

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = \mathfrak{X} + \omega^2 \mathfrak{x} + 2\omega \frac{d\mathfrak{y}}{dt},$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2} = \mathfrak{Y} + \omega^2 \mathfrak{y} - 2\omega \frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2} = \mathfrak{Z}.$$

§ 204. *Esempio.* — " Supposti gli assi delle $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in movimento rotatorio uniforme, con velocità angolare di misura ω, intorno all'asse delle $\mathfrak{z}$ fisso, come asse, trovare il movimento di un punto relativo a questa terna di assi considerati come fissi, nell'ipotesi che l'accelerazione del punto nel suo movimento rispetto ad una terna d'assi fissi sia costante e orientata come l'asse delle $\mathfrak{z}$. "

Abbiamo:

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} = \omega^2 \mathfrak{x} + 2\omega \frac{d \mathfrak{y}}{d t}, \qquad \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2} = \omega^2 \mathfrak{y} - 2\omega \frac{d \mathfrak{x}}{d t}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2} = g \tag{1)'$$

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{lll} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0, & \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0, \quad (2) & \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0, \\ \frac{d \mathfrak{x}}{d t} = \mathfrak{u}_0, & \frac{d \mathfrak{y}}{d t} = \mathfrak{v}_0, & \frac{d \mathfrak{z}}{d t} = \mathfrak{w}_0. \end{array} \right. \quad (2)'$$

Pongasi:

$$\mathfrak{x} = \rho \cos \theta, \qquad \mathfrak{y} = \rho \sin \theta;$$

e conformemente a ciò:

$$\mathfrak{x}_0 = \rho_0 \cos \theta_0, \qquad \mathfrak{y}_0 = \rho_0 \sin \theta_0.$$

Saranno così ρ, θ le coordinate polari della projezione del punto sul piano $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$, assunta l'origine per polo, e l'asse delle $\mathfrak{x}$ positive per asse polare.

Notiamo che il movimento di questa projezione relativo agli assi mobili considerati come fissi è fornito dalle (1), (2): mentre per (1)', (2)' è

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{w}_0\, t + \frac{1}{2} g\, t^2;$$

cioè il movimento della projezione sull'asse fisso, uniformemente accelerato, colla supposta accelerazione, e per velocità iniziale il componente di quella del punto secondo l'asse medesimo.

Pel movimento relativo della projezione sul piano $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$, ossia sopra un piano perpendicolare all'asse di rotazione, le (1) forniscono, in primo luogo:

$$\mathfrak{x} \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2} - \mathfrak{y} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} = -2\omega \left(\mathfrak{x} \frac{d \mathfrak{x}}{d t} + \mathfrak{y} \frac{d \mathfrak{y}}{d t} \right) = -2\omega\, \rho \frac{d \rho}{d t};$$

donde:

$$\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{y}}{dt} - \mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = A - \omega\rho^2, \qquad A = \mathfrak{U}_0\,\rho_0 \sin\varphi_0 + \omega\rho_0^2,$$

indicando con $\mathfrak{U}_0$, φ_0 la grandezza all'istante iniziale della velocità del movimento della projezione in discorso relativo agli assi mobili considerati come fissi nella posizione iniziale, cioè della projezione sul piano $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ del punto $\mathfrak{M}$ (o) per $t = 0$, e la misura dell'angolo formato da essa col raggio descritto dall'origine al posto all'istante medesimo crescente nel senso positivo rispetto all'asse delle $\mathfrak{z}$, ossia:

$$\rho^2 \frac{d(\theta + \omega t)}{dt} = A. \tag{3}$$

In secondo luogo, dalle stesse (1):

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{y}}{dt}\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = \omega^2\left(\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right) = \omega^2\rho\frac{d\rho}{dt};$$

donde:

$$\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right)^2 = B + \omega^2\rho^2, \qquad B = \mathfrak{U}_0^2 - \omega^2\rho_0^2;$$

ossia:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = B + \omega^2\rho^2.$$

Ora, per (3):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{A}{\rho^2} - \omega, \qquad \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{A^2}{\rho^2} - 2\omega A + \omega^2\rho^2.$$

E per conseguenza:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = B + 2\omega A - \frac{A^2}{\rho^2}.$$

Osserviamo che:

$$B + 2\omega A = \mathfrak{U}_0^2 + \omega^2\rho_0^2 + 2\,\mathfrak{U}_0\,\omega\rho_0 \sin\varphi_0 \gtreqless (\mathfrak{U}_0 + \omega\rho_0)^2 \geqq 0;$$

per modo che, posto:

$$B + 2\omega A = K^2, \tag{4}$$

sarà K numero reale. E con ciò:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = K^2 - \frac{A^2}{\rho^2}. \tag{5}$$

Supposto K diverso da zero, si ha di qui:

$$dt = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{K^2\rho^2 - A^2}} = \frac{1}{K^2}\, d\sqrt{K^2\rho^2 - A^2},$$

$$d(\theta + \omega t) = A\frac{d\rho}{\rho\sqrt{K^2\rho^2 - A^2}} = d \arccos\frac{A}{K\rho},$$

relazioni che forniscono ρ e θ in funzione di t.

Supposto $K = 0$, per (5) sarà $A = 0$, donde, per (4), $B = 0$. Quindi:

$$\rho = \rho_0, \qquad \theta = \theta_0 - \omega t.$$

Ora, in questo caso:

$$u_0 = \pm\, \omega\rho_0, \qquad \sin\varphi_0 = \mp 1,$$

dove si deve prendere il segno superiore o l'inferiore secondo che ω è positivo o negativo; cioè per $t = 0$ la velocità della projezione del punto $\mathfrak{R}$ (o) sul piano $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ eguale ed opposta a quella del punto $\mathfrak{S}$ (o); e per conseguenza la velocità del punto considerato nel movimento effettivo o nulla o parallela all'accelerazione (cfr. §§ 140, 175).

Notiamo come questo risultato collimi con quelli del § 196. E chiaramente il risultato dell'integrazione delle (1) deve coincidere con quello che si ottiene introducendo nelle (2, § 134) le (2, § 196), fatte le premesse ipotesi sulla scelta degli assi coordinati.

Accelerazioni d'ordine superiore.

§ 205. — Col procedimento che ci ha servito per ricavare l'accelerazione dalla velocità (§§ 187-189), si deduce dall'accelerazione un vettore che si chiama l' " accelerazione di secondo ordine ". E così continuando, si giunge a definire l' " accelerazione d' n^{mo} ordine ", che, assunta la solita terna d'assi coordinati, rispetto alla quale x, y, z sono le coordinate del punto mobile al tempo t, risulta il vettore avente per componenti:

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}, \qquad \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \qquad \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}},$$

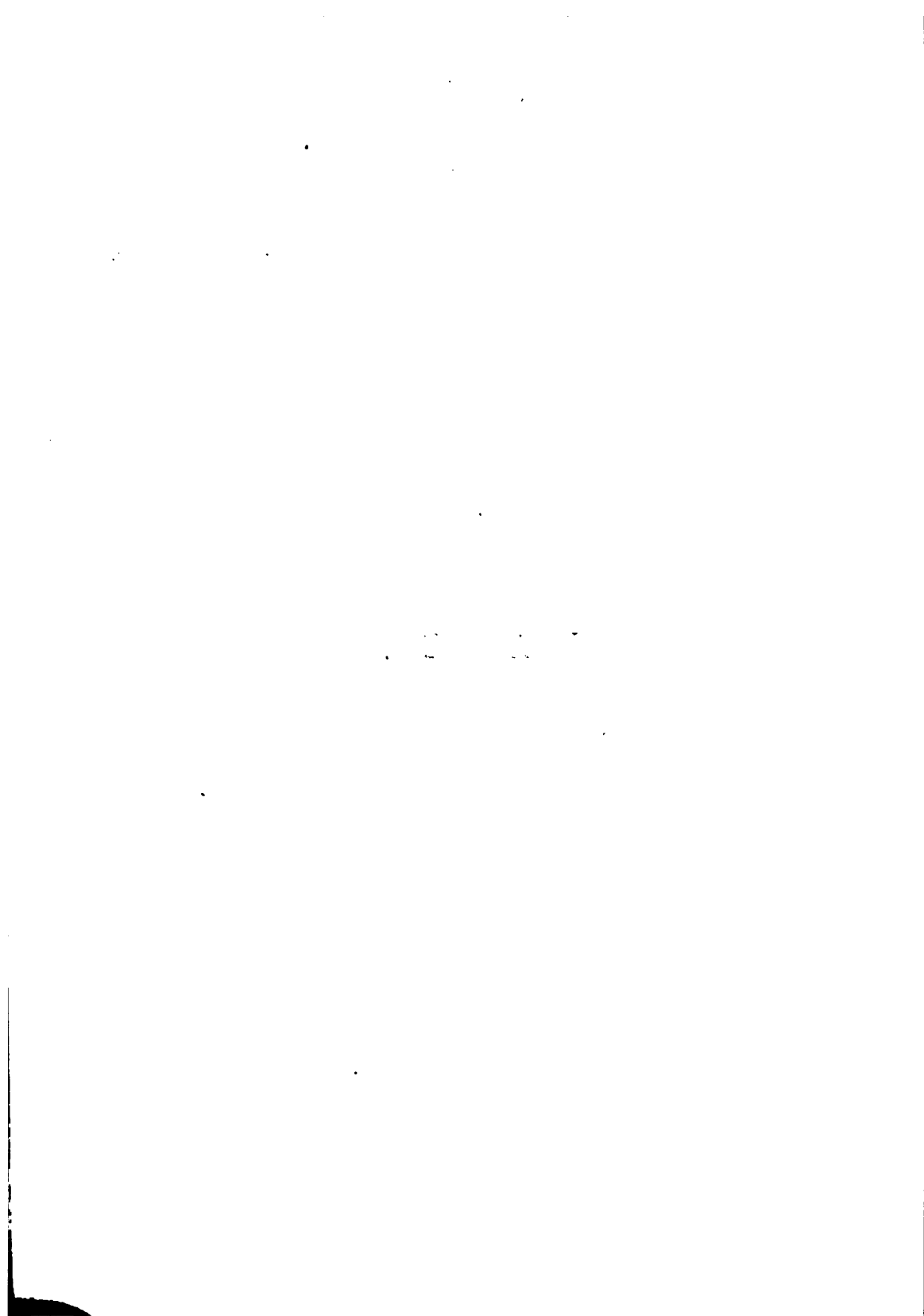
per modo che la relativa quantità si riferisce all' unità derivata rappresentata da $[l\,t^{-(n+1)}]$.

Dalla considerazione di questo vettore, con n qualunque, furono fatte notevoli applicazioni; * e in ogni caso esso costituisce una particolar forma di descrizione del movimento del punto, ed è atto a determinarlo come la velocità e l'accelerazione (cfr. §§ 141, 194). Ma queste, corrispondenti a $n = 0$ e $n = 1$, ci sono sufficienti per la teoria generale dei movimenti quali si presentano in Natura, non ritraendo dagli altri casi un vantaggio paragonabile l'espressione delle leggi sperimentali del movimento.

Giova anche notare il diverso ufficio di ciascuno di quei due elementi; per la qual ragione non estendiamo qui più oltre l'esposizione delle proprietà dell'accelerazione, diversamente da quanto abbiamo fatto per la velocità. Chè alcune proprietà, corrispondenti a quelle indagate per la velocità, non giovano abbastanza direttamente al nostro scopo, ed altre, che ci occorre considerare, sono di tal natura da trovare il loro posto nella Dinamica.

* V. p. e. *S. Somoff.* — *Theoretische Mechanik.* — trad. tedesca di *Ziwet* — Leipzig, 1878-79.

W. Schell. — *Theorie der Bewegung und der Kräfte.* — 2.ª edizione — Leipzig, 1879.

DINAMICA.

PARTE PRIMA.

LEGGI GENERALI DEL MOVIMENTO

CAPITOLO PRIMO.

MASSA E FORZA MOTRICE.

Figura materiale.

§ 206. *Definizione.* — " Figura materiale „ chiamiamo un mobile, rappresentato da una porzione continua di spazio, in movimento continuo regolare, e dotato degli *attributi* che saranno in seguito indicati.

§ 207. *Definizione.* — " Accelerazione media „ d'una figura materiale, ad un istante, è il vettore di cui il componente secondo ogni asse è il valor medio dei componenti secondo lo stesso asse dell'accelerazione all'istante considerato dei punti della figura.

Perciò è necessario e sufficiente che i suoi componenti secondo tre assi non paralleli ad un piano siano i suddetti valori medii.

Indichi τ la grandezza del volume della figura, e x, y, z siano le coordinate del suo punto qualunque al tempo t. La precedente definizione si riduce a questa: Accelerazione media della figura materiale al tempo t è il vettore le cui componenti secondo i tre assi delle coordinate sono:

$$\frac{\int \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau}{\tau}, \quad \frac{\int \frac{d^2 y}{d t^2} d\tau}{\tau}, \quad \frac{\int \frac{d^2 z}{d t^2} d\tau}{\tau}.$$

§ 208. *Attributo* 1.° — Due figure materiali isolate hanno ad ogni istante accelerazioni medie — o ambedue nulle, o parallele,

di senso opposto, le cui grandezze hanno fra loro un rapporto invariabile col tempo, puramente determinato dalla coppia delle due figure — definite dalla posizione delle due figure, e dal loro atto di movimento.

§ 209. *Attributo 2.°* — Concepite due figure materiali separatamente isolate con una terza qualsivoglia, il quoziente dei rapporti dell'accelerazione media di ciascuna di esse a quella della terza sarà il corrispondente rapporto delle loro accelerazioni medie.

Cioè, se F_1, F_2, F_3 dinotano tre figure materiali, e q_{12}, q_{13}, q_{23} sono i rapporti dell'accelerazione di F_1 a quella di F_2, dell'accelerazione di F_1 a quella di F_3, e dell'accelerazione di F_2 a quella di F_3 (s'intende sempre accelerazione media), supposte le figure isolate a due a due, sarà $q_{12} = \frac{q_{13}}{q_{23}}$.

§ 210. *Definizione.* — “ Grandezza della massa d'una figura materiale, per rispetto ad un'altra determinata „ è il rapporto dell'accelerazione media di questa all'accelerazione media della figura considerata, supposte le due figure isolate.

Alla figura assunta come termine di confronto si attribuisce per grandezza della massa l'unità.

§ 211. *Osservazione.* — Pel 1.° attributo (§ 208), fissata la figura termine di confronto, o figura campione, di cui la grandezza della massa è posta 1, ogni altra figura materiale avrà una certa grandezza della massa per rispetto ad essa, rappresentata da un numero positivo indipendente dal tempo, puramente determinato dalla figura. Grandezza della massa rappresentata da 1, cioè eguale a quella della figura campione, avranno tutte le figure materiali che, concepite isolate con essa, hanno accelerazione media di grandezza eguale.

Pel 2.° attributo poi, e tenuto calcolo della convenzione che 1 è la grandezza della massa della figura campione, si avrà la grandezza della massa di una figura per rispetto ad un campione diverso, semplicemente dividendo la grandezza della massa per rispetto al primo campione per la grandezza della massa del secondo per rispetto al primo campione medesimo, ossia moltiplicando la grandezza della massa per rispetto al primo

campione per la grandezza della massa del primo rispetto al secondo. Donde viene, fra l'altre conseguenze, che il rapporto delle grandezze della massa rispetto ad un campione di due figure materiali è indipendente da questo campione.

§ 212. *Corollario.* — Due figure materiali, isolate l'una coll'altra, hanno ad ogni istante accelerazioni medie parallele, di senso opposto, e di grandezza inversamente proporzionale alle loro grandezze della massa (s'intende per rispetto ad uno stesso campione qualsivoglia).

Ne viene che se X, Y, Z e m, X', Y', Z' e m' rappresentano le componenti dell'accelerazione media e le grandezze della massa di due figure materiali, concepite isolate d'una coll'altra, sarà:

$$m X = - m' X', \quad m Y = - m' Y', \quad m Z = - m' Z'.$$

§ 213. *Attributo* 3.° — Una figura materiale, isolata con due o più altre insieme, ha un' accelerazione media che è il risultante di quelle che ha isolata separatamente con ciascuna di esse.

Cioè, se X, Y, Z e X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, \ldots. n$) rappresentano le componenti dell'accelerazione media di una figura materiale concepita isolata con n altre insieme e separatamente con ciascuna di esse, sarà:

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i.$$

§ 214. *Attributo* 4.° — Ogni parte di una figura materiale è una figura materiale. *

§ 215. — Il quarto attributo, in forza dei precedenti, dà luogo al seguente

Teorema. — La grandezza della massa di una parte di una figura materiale è proporzionale al suo volume.

Sia infatti la figura F isolata colla figura F'. Concepiamo F decomposta in parti in un modo qualsivoglia; e indichiamo con $\Delta \tau$ e Δm la grandezza del volume e la grandezza della

* Una volta per sempre, quando non si dichiari il contrario, la divisione di un mobile in parti s'intende ottenuta decomponendo il campo che lo rappresenta.

massa della sua parte qualunque: con X_i, Y_i, Z_i le componenti dell'accelerazione media di questa parte, supposta isolata con un'altra parte qualunque della stessa figura: con X_e, Y_e, Z_e le componenti dell'accelerazione media della parte medesima, supposta isolata coll'altra figura F'.

Sarà (§ 213):

$$\frac{\int_{\Delta\tau} \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau}{\Delta\tau} = \overline{\Sigma}\, X_i + X_e\,,$$

dove $\overline{\Sigma}$ si estende a tutte le parti della figura F che non è la considerata.

Di qui, intendendo che la sommatoria Σ si estenda a tutte le parti della figura medesima:

$$\Sigma \frac{\Delta m}{\Delta\tau} \int \frac{d^2x}{dt^2} dt = \Sigma\, \Delta m\, \overline{\Sigma}\, X_i + \Sigma\, \Delta m\, X_e.$$

Ora:

$$\Sigma\, \Delta m\, \overline{\Sigma}\, X_i = 0\,,$$

perchè ad ogni termine della doppia somma ne corrisponde un altro eguale e di segno contrario (§ 214). E indicando con m' la grandezza della massa della figura F', e con X'_e, Y'_e, Z'_e le componenti della sua accelerazione media, supposta isolata colla parte della figura F cui si riferiscono X_e, Y_e, Z_e:

$$\Delta m\, X_e = -\, m'\, X'_e\,;$$

per modo che:

$$\Sigma\, \Delta m\, X_e = -\, m'\, \Sigma\, X'_e\,:$$

cioè eguale e di segno contrario al prodotto della componente secondo l'asse delle x dell'accelerazione media della figura F' isolata con F per la grandezza della massa di F' (§ 213): e per conseguenza eguale al prodotto della componente analoga dell'accelerazione media della figura F isolata con F' per la grandezza della massa di F (§ 214).

Si conclude:

$$\Sigma \frac{\Delta m}{\Delta\tau} \int_{\Delta\tau} \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = m\, \frac{\int_{\tau} \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau}{\tau} = \Sigma\, \frac{m}{\tau} \int_{\Delta\tau} \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau.$$

E siccome la decomposizione della figura è arbitraria:

$$\frac{\Delta m}{\Delta \tau} = \frac{m}{\tau},$$

c. v. d.

§ 216. *Corollario.* — La somma delle grandezze della massa delle singole parti d'una figura materiale è la grandezza della massa della figura materiale.

Difatti indicando con $m_1, m_2, \dots m_n$ le grandezze della massa, e con $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n$ le grandezze dei volumi di n parti in cui una figura materiale si concepisca decomposta, per modo che:

$$\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n = \tau,$$

si ha, per la precedente proposizione:

$$\frac{m_1}{\tau_1} = \frac{m_2}{\tau_2} = \dots = \frac{m_n}{\tau_n} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n} = \frac{m}{\tau};$$

donde:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = m.$$

§ 217. *Definizione.* — "Grandezza della densità„ di una figura materiale chiamiamo il rapporto costante della grandezza della massa alla grandezza del volume d'ogni sua parte.

Quindi, se k indica la grandezza della densità d'una figura materiale di cui τ e m indicano la grandezza del volume e la grandezza della massa, abbiamo:

$$m = k\tau.$$

§ 218. — Per definizione, la grandezza della massa d'una figura materiale, nel corso del movimento, si mantiene invariabile (§ 210, 211). Può invece variare il volume. E in questo caso, per la precedente relazione, dovrà variare col tempo anche la grandezza della densità: in modo che, indicando con τ e k la grandezza del volume e la grandezza della densità allo stesso tempo t, sia:

$$k\tau = \textit{costante rispetto a } t;$$

relazione che sta egualmente per una figura materiale, e per ogni sua parte.

Proposizione ausiliare d'analisi.

§ 219. *Teorema.* — Sia un campo τ, i cui singoli punti s'intendono definiti dal loro posto iniziale, variabile con t in modo continuo. Indichino k e λ due funzioni continue e finite di t e del posto qualsivoglia del campo, la prima delle quali di segno invariabile, e D rappresenti l'incremento relativo al passaggio da t e $t + Dt$, mentre il punto o i punti restano gli stessi. Dico che, se è:

$$D \int_{\Delta\tau} k \, d\tau = 0 \tag{1}$$

per ogni parte $\Delta\tau$ comunque ristretta del campo, sarà:

$$D \int_{\tau} \lambda \, k \, d\tau = \int_{\tau} D\lambda \, k \, d\tau. \tag{2}$$

Difatti, per (1) (§ 65):

$$D \int_{\Delta\tau} \lambda \, k \, d\tau = D'\overline{\lambda} \int_{\Delta\tau} k \, d\tau,$$

dove $\overline{\lambda}$ e $\overline{\lambda} + D'\overline{\lambda}$ s'intendono rappresentare i valori di λ in certi posti del campo relativo a t e $t + Dt$, che generalmente non apparterranno allo stesso punto mobile.

Di qui, concepito il campo τ decomposto in tante parti $\Delta\tau$, e la sommatoria estesa a tutte le parti:

$$D \int_{\tau} \lambda \, k \, d\tau = D \Sigma \int_{\Delta\tau} \lambda \, k \, d\tau = \Sigma \, D'\overline{\lambda} \int_{\Delta\tau} k \, d\tau = \Sigma \, D'\overline{\lambda} \, \overline{k} \, \Delta\tau,$$

dove $\overline{k}$ indica il valore di k in un certo posto di $\Delta\tau$ (§ 65). Ed anche:

$$D \int_{\tau} \lambda \, d\tau = \lim \Sigma \, D'\overline{\lambda} \, \overline{k} \, \Delta\tau,$$

ove il limite s'intende collo svanire d'una sfera comprendente le singole parti, definito come al § 64.

Ora, si riconoscerà agevolmente che nelle nostre ipotesi il limite non cambia riferendo $\overline{k}$ e $\overline{\lambda}$ allo stesso posto di $\Delta\tau$, e

indicato con $\overline{\lambda} + D\overline{\lambda}$ il valore di λ nel posto del campo relativo a $t + Dt$ che corrisponde a quello (cioè occupato dal punto mobile che a t cade in quello) sostituendo $D\overline{\lambda}$ a $D'\overline{\lambda}$.

Con ciò:

$$D\int_\tau \lambda\, k\, d\tau = \lim \Sigma\, D\overline{\lambda}\, \overline{k}\, \Delta\tau,$$

la qual relazione altro non è che l'enunciata (2).

§ 220. *Corollario* 1.° — Sotto le precedenti condizioni, e supposto, oltre λ, anche $\frac{d\lambda}{dt}$ (cfr. § 174) funzione continua e finita dell'insieme di variabili formato da t nell'intervallo considerato, e da x, y, z nel campo τ — così indicando le coordinate del posto occupato a t dal punto qualunque del campo variabile — sarà:

$$\frac{d\int_\tau \lambda\, k\, d\tau}{dt} = \int_\tau \frac{d\lambda}{dt}\, k\, d\tau,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{d\lambda}{dx}u + \frac{d\lambda}{dy}v + \frac{d\lambda}{dz}w.$$

§ 221. *Corollario* 2.° — Sotto le condizioni del § 220, si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\tau \lambda\, k\, d\tau = \int_\tau k\, d\tau \int_{t_1}^{t_2} \lambda\, dt,$$

ove, nel secondo membro, il valore di t cui si riferisce il campo τ si può assumere nell'intervallo $(t_1\, t_2)$ a piacere.

Difatti, indicando questo valore con t, il primo membro si può mettere sotto la forma:

$$\int_{t_1}^{t} dt \int_\tau \lambda\, k\, d\tau + \int_{t}^{t_2} dt \int_\tau \lambda\, k\, d\tau,$$

mentre il secondo può scriversi:

$$\int_\tau k\, d\tau \int_{t_1}^{t} \lambda\, dt + \int_\tau k\, d\tau \int_{t}^{t_2} \lambda\, dt;$$

e dal precedente corollario risulta immediatamente l'eguaglianza dei primi e dei secondi termini rispettivamente.

Punto medio.

§ 222. — " Punto medio „ di un sistema continuo di punti, o di un insieme di sistemi continui, si chiama il punto la misura della cui distanza da un piano orientato qualunque — inteso che questa misura sia positiva o negativa secondo che il punto giace dalla parte del piano verso cui è volto l'asse o dalla parte opposta — è il valor medio delle misure delle distanze dei punti del sistema, o dell'insieme di sistemi continui.

Questa definizione si riduce a quest'altra: indicando con τ la grandezza dell'estensione, e con x, y, z le coordinate del punto qualunque del campo rappresentato dal sistema continuo, o complessivamente dall'insieme, il punto medio del sistema continuo, o dell'insieme, è quello che ha per coordinate:

$$\bar{x} = \frac{\int_\tau x\, d\tau}{\tau}, \quad \bar{y} = \frac{\int_\tau y\, d\tau}{\tau}, \quad \bar{z} = \frac{\int_\tau z\, d\tau}{\tau}.$$

Egualmente si definisce il punto medio del sistema discreto di n punti, intendendo che il valor medio sia l'ordinaria media aritmetica. Così, se x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ sono le coordinate dei singoli punti del sistema, quelle del punto medio saranno:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma z_i}{n}.$$

Si riconosce immediatamente che $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ così definite saranno comprese fra i valori estremi delle coordinate corrispondenti dei punti del sistema — intendiamo, sistema continuo, o insieme di sistemi continui, o sistema discreto. Cioè una superficie sferica fuori della quale non cada alcun punto del sistema comprenderà necessariamente il punto medio.

Notiamo anche la proprietà che, se il sistema ammette centro di figura, questo sarà il suo punto medio; e l'altra, che il punto medio di un insieme qualunque di sistemi sarà il punto medio del sistema formato dai punti medii di ciascheduno.

Punto medio o centro di massa d'una figura materiale.

§ 223. — Punto medio o anche " centro di massa „ d'una figura materiale si dice il punto medio del corpo, o dell'insieme di corpi, che la rappresenta all'istante considerato.

§ 224. — Ciò posto, si ha per una figura materiale, col precedente significato dei simboli, (cfr. § 220):

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d^2}{d t^2} \frac{\int x \, d\tau}{\tau} = \frac{d^2}{d t^2} \frac{k \int x \, d\tau}{k \tau} = \frac{\int \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau}{\tau} .$$

Quindi il *Teorema:* L'accelerazione media d'una figura materiale è ad ogni istante l'accelerazione del suo centro di massa a quell'istante.

Sistema di figure materiali.

§ 225. *Definizione.* — " Sistema di figure materiali „ intendiamo l'insieme di un certo numero di figure materiali, di grandezza della densità generalmente diversa, rappresentate da porzioni dello spazio che, stabiliremo, non si compenetrano l'una coll'altra.

§ 226. *Definizione.* — " Grandezza della massa „ di un sistema di figure materiali è la somma delle grandezze della massa delle singole figure componenti il sistema.

§ 227. *Definizione.* — " Accelerazione media „ di un sistema di figure materiali è il vettore la cui componente secondo un asse qualsivoglia, indicando con U la componente secondo lo stesso asse dell'accelerazione media della figura componente qualunque, e con m la grandezza della massa della figura medesima, è

$$\frac{\Sigma m U}{\Sigma m} ,$$

dove la sommatoria abbraccia tutte le figure.

Assunta la solita terna d'assi cartesiani ortogonali, indicando con $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ le componenti secondo gli assi dell'accelerazione media della figura componente qualunque, e con m la grandezza della massa della figura medesima, equivale alla precedente definizione quella che le componenti secondo i tre assi dell'accelerazione media del sistema sono

$$\frac{\Sigma m \overline{X}}{\Sigma m}, \qquad \frac{\Sigma m \overline{Y}}{\Sigma m}, \qquad \frac{\Sigma m \overline{Z}}{\Sigma m}.$$

§ 228. *Teorema.* — 1) Due sistemi di figure materiali, concepiti isolati l'uno coll'altro, hanno ad ogni istante accelerazioni medie parallele, di senso opposto, le cui grandezze sono inversamente proporzionali alle grandezze della massa.

2) Un sistema di figure materiali, isolato con due o più altri, ha un'accelerazione media che è il risultante di quelle che separatamente avrebbe isolato con ciascuno di essi.

Ciò segue immediatamente, poste le suddette definizioni (§§ 226, 227), dalle proposizioni precedenti (§§ 213, 214), e fornisce la ragione delle definizioni medesime

§ 229. *Definizione.* — " Centro di massa „ di un sistema di figure materiali è il punto tale che, indicando con m la grandezza della massa della figura qualunque del sistema, e con p la misura della distanza del centro di massa della figura medesima da un piano orientato qualsivoglia — intesa positiva o negativa secondo che il punto sta dalla parte verso cui è volto l'asse o dall'opposta — la misura della sua distanza da questo piano è

$$\frac{\Sigma m p}{\Sigma m},$$

dove le sommatorie abbracciano tutte le figure del sistema.

Ciò torna dire che, se $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ rappresentano le coordinate ordinarie del centro di massa della figura qualunque del sistema, e m la grandezza della massa della figura medesima, il centro di massa del sistema è il punto le cui coordinate sono:

$$\frac{\Sigma m \overline{x}}{\Sigma m}, \qquad \frac{\Sigma m \overline{y}}{\Sigma m}, \qquad \frac{\Sigma m \overline{z}}{\Sigma m}.$$

Si riconoscerà subito che una superficie sferica fuori della quale non cada il centro di massa d'alcuna figura del sistema comprenderà il centro di massa del sistema; inoltre come abbia luogo il *Teorema:* L'accelerazione media di un sistema di figure materiali ad ogni istante è l'accelerazione del centro di massa del sistema medesimo (§ 224).

§ 230. — Indichino m la grandezza della massa d'un sistema di figure materiali: X, Y, Z e $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ le componenti dell'accelerazione media e le coordinate del centro di massa ad un istante, corrispondente al tempo qualunque t: τ la grandezza del volume *complessivo* del campo rappresentato dalle figure componenti il sistema, prese tutte insieme, allo stesso istante — " volume del sistema ": — x, y, z le coordinate del punto qualunque del campo medesimo, il quale, per l'ipotesi che le figure componenti il sistema non si compenetrano l'una coll'altra, sarà il punto qualunque d'una di esse e d'una sola: finalmente k la grandezza della densità, sempre all'istante considerato, della figura materiale componente il sistema a cui il punto (x, y, z) appartiene.

Abbiamo, pei precedenti risultati, le formole:

$$m = \int_\tau k\, d\tau,$$

$$\left.\begin{array}{lll} X = \dfrac{\int_\tau k \dfrac{d^2 x}{dt^2} d\tau}{m}, & Y = \dfrac{\int_\tau k \dfrac{d^2 y}{dt^2} d\tau}{m}, & Z = \dfrac{\int_\tau k \dfrac{d^2 z}{dt^2} d\tau}{m}, \\ \bar{x} = \dfrac{\int_\tau k x\, d\tau}{m}, & \bar{y} = \dfrac{\int_\tau k y\, d\tau}{m}, & \bar{z} = \dfrac{\int_\tau k z\, d\tau}{m}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

dove gl'integrali s'intendono estesi al campo τ, complessivamente rappresentato da tutte le figure al tempo t.

E si verificano le relazioni:

$$X = \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2}, \quad Y = \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2}, \quad Z = \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2}. \quad (2)$$

Postulato dei corpi naturali.

§ 231. *Postulato.* — Ogni " corpo naturale ", in una certa " condizione fisica ", si comporta, o come un sistema geometricamente eguale di figure materiali (se capita, come una semplice figura materiale), o come il limite d'un siffatto sistema col tendere d'ogni figura componente ad un punto. Vale a dire è, in ogni caso, un mobile in movimento continuo regolare, o formato da una riunione di mobili, che non si compenetrano, ciascuno in movimento continuo regolare; e, fissato un corpo come campione, esiste per ognuno, nelle singole circostanze, una funzione k, del tempo e del punto del corpo, positiva, finita e, almeno in ogni parte convenientemente limitata, continua — " grandezza della densità del corpo nei singoli punti (rispetto al supposto campione) " — tale che, indicando con τ la grandezza del volume al supposto istante, $\int k d\tau$, esteso a tutto il corpo, o ad una sua parte qualunque, è invariabile col tempo, ed ha pel campione il valor 1: e definita la " grandezza della massa del corpo, rispetto al campione ", m, e l' " accelerazione media al tempo t ", (X, Y, Z), mediante le relazioni (1, § 230), si verificano le proposizioni enunciate per le figure materiali e i sistemi di figure materiali. La condizione fisica determina, a parità di circostanze, le accelerazioni medie di due corpi naturali, concepiti isolati; il rapporto delle loro grandezze è puramente determinato dalla coppia: e quindi la grandezza della massa d'un corpo rispetto ad un campione, puramente determinata dal corpo.

Postulato delle condizioni fisiche.

§ 232. — Condizione fisica è innanzi tutto lo " stato naturale *d'ogni particolare sostanza o qualità di corpi* ", chiamato con quel termine in confronto dello " stato elettrico " e dello " stato magnetico ", e che giova supporre talvolta anche modificato da vincoli prestabiliti.

Postulato. Concepito un corpo isolato con un altro, e accumulate nei due corpi due o più condizioni fisiche capaci di determinare separatamente nel corpo una certa accelerazione media, l'accelerazione media del corpo sarà il risultante di queste.

Osservazione. Notiamo come questo postulato sia conforme al precedente, secondo cui le accelerazioni medie di due corpi, concepiti isolati l'uno coll'altro, avranno, qualunque sia la condizione fisica, orientazioni eguali ed opposte, e grandezze inversamente proporzionali alle grandezze della massa.

Difatti, se m, m' indicano le grandezze della massa dei due corpi rispetto ad un certo campione, e (X_1, Y_1, Z_1), (X'_1, Y'_1, Z_1') le loro accelerazioni medie con una certa condizione fisica, mentre (X_2, Y_2, Z_2), (X'_2, Y'_2, Z'_2) rappresentano le loro accelerazioni medie allo stesso istante con un' altra condizione fisica, da:

$$\frac{X_1}{X_1'} = \frac{X_2}{X'_2} = -\frac{m'}{m}, \quad \frac{Y_1}{Y'_1} = \frac{Y_2}{Y'_2} = -\frac{m'}{m}, \quad \frac{Z_1}{Z'_1} = \frac{Z_2}{Z'_2} = -\frac{m'}{m},$$

come vuole il primo postulato, segue:

$$\frac{X_1 + X_2}{X'_1 + X'_2} = -\frac{m'}{m}, \quad \frac{Y_1 + Y_2}{Y'_1 + Y'_2} = -\frac{m'}{m}, \quad \frac{Z_1 + Z_2}{Z'_1 + Z'_2} = -\frac{m'}{m}.$$

Centro di massa d'un corpo naturale.

§ 233. — "Centro di massa" d'un corpo naturale chiamiamo il punto, le cui coordinate $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ sono, col significato dei simboli a suo luogo stabiliti, definiti dalle relazioni (1, § 230).

Per conseguenza, se p indica la misura della distanza del punto qualunque del corpo, cui corrisponde il valor k della grandezza della densità, da un piano orientato qualsivoglia, intesa positiva o negativa secondo che il punto si trova dalla parte verso cui è volto l'asse del piano, o dalla parte opposta, il punto in discorso è definito, se vuolsi, dalla proprietà che la misura della sua distanza dal piano medesimo è:

$$\frac{\int_{\tau} k p \, d\tau}{m}.$$

Si riconosce immediatamente colle stesse considerazioni che servono per le figure materiali e i sistemi di figure materiali, che:

1) una superficie chiusa, fuori della quale non cade alcun punto d'un corpo naturale, comprenderà il suo centro di massa.

2) l'accelerazione media d'un corpo naturale ad ogni istante è l'accelerazione del suo centro di massa; cioè si verificano le relazioni (2, § 230).

Quando un corpo si concepisce come il sistema di più altri, il suo centro di massa si dirà anche " comun centro di massa „ di questi.

Massa d'un corpo naturale.

§ 234. — Pel postulato dei corpi naturali (§ 231), ad ogni corpo naturale e ad ogni parte di esso, fissato un certo corpo come campione, corrisponde un numero, m, invariabile col tempo e con tutte le circostanze del movimento, che chiamiamo la grandezza della massa del corpo, o della parte considerata, per rispetto al corpo assunto come campione.

Per definizione, questo numero ha pel corpo assunto come campione il valor 1 (§ 231): se m è il suo valore per un corpo rispetto ad un certo campione, il suo valore per lo stesso corpo rispetto ad un altro campione, rispetto al quale m' è il suo valore pel campione precedente, sarà $m' m$ (§§ 211, 226, 231): se è $m = m_1 + m_2$, il corpo è decomponibile in due parti per le quali il valore del numero rispetto allo stesso campione è rispettivamente m_1 e m_2, e l'insieme di due corpi naturali pei quali il numero ha i valori m_1 e m_2 costituisce un corpo naturale pel quale, sempre rispetto allo stesso campione, il numero ha il valore $m_1 + m_2$ (§§ 216, 226, 231).

Conformemente a ciò annetteremo ai corpi naturali una quantità (cfr. §§ 25, 26), che chiameremo la " massa „ dei singoli corpi, per la quale:

1) l'unità sarà " un corpo naturale qualsivoglia, concepito come distinto dal valore del rapporto della grandezza della sua

accelerazione a quella d'ogn'altro corpo naturale con cui s'immagini isolato „ per modo che varrà egualmente come unità di massa ogni corpo per cui questo rapporto sia l'unità:

2) la misura, per ogni corpo, è la grandezza della massa del corpo rispetto al campione assunto per unità di massa:

3) l'operazione di riunione è la ricostituzione d'un corpo naturale mediante le sue singole parti, e la costituzione d'un corpo naturale come insieme di più altri.

§ 235. — É un concetto d'uso famigliare che ogni corpo naturale importi un certo *quantum*, il quale si mantiene inalterato, per qualsivoglia trattamento, finchè al corpo non si toglie alcuna sua parte, e non vi si unisce qualche altro corpo: in un corpo di cui parti geometricamente identiche appariscono anche in tutto identiche, è per le singole parti proporzionale al loro volume: riunendo corpi identici, si moltiplica pel loro numero: e più in generale, per un corpo formato colla riunione di più altri, è l'insieme di quelli che ciascuno importa separatamente. Queste proprietà appartengono alla massa, come l'abbiamo definita: la quale, per questo, come per altro che rileveremo in seguito, si suol considerare, specialmente nelle applicazioni della Meccanica, come espressione di quel *quantum*, e chiamare anche " quantità di materia „.

Giova notare che questo è un altro di quei concetti che richiedono prima di tutto d'essere esattamente definiti. E una definizione è appunto la precedente, secondo la quale, a chi piace invocare l'idea di quantità di materia, essa è affermata pei singoli corpi inversamente proporzionale al rapporto della grandezza della loro accelerazione media a quella d'uno stesso corpo qualsivoglia con cui si concepiscano separatamente isolati.

Unità fondamentali. — Misura assoluta.

§ 236. — L'unità di lunghezza, $[l]$, di tempo, $[t]$, e di massa, $[m]$, si chiamano " unità fondamentali „. La misura d'una quantità qualunque collegata con quelle da relazioni geometriche o fisiche si dice " assoluta „ quando corrisponde ad un'unità deri-

vata formata colle unità fondamentali (§ 27), la quale si dice alla sua volta " unità di misura assoluta „.

L'unità di lunghezza più comunemente usata in Meccanica è il " metro „, lunghezza alla temperatura di 0° della scala centigrada dello spigolo d'un regolo particolare, maggiore per meno di un centomillesimo della sua lunghezza della decimillesima parte della lunghezza del quarto di meridiano terrestre medio; l'unità di tempo è il " minuto secondo di tempo medio „ che è $\frac{1}{24.60.60}$ dell'intervallo di tempo compreso fra due passaggi consecutivi del Sole Medio pel meridiano d'uno stesso luogo; l'unità di massa, finalmente, il " grammo „ che è un centimetro cubo d'acqua distillata alla temperatura di 4° della scala centigrada (§ 234).

Densità d'un corpo naturale.

§ 237. — " Densità nei singoli punti d'un corpo naturale „ chiamiamo la quantità derivata la cui misura è il numero precedentemente definito come grandezza della densità nei singoli punti, e per conseguenza l'unità $[k]$, dovendo essere tale che $[m] = [l^3 k]$, rappresentata da $[l^{-3} m]$.

§ 238. — Se in tutti i punti d'un corpo la densità ha lo stesso valore, si chiama la " densità del corpo „ senz'altro, e il corpo si dice " omogeneo „.

Così, nei corpi omogenei la massa delle singole parti è proporzionale al loro volume: e l'unità di densità è quella d'un corpo omogeneo che, coll'unità di volume, ha l'unità di massa.

§ 239. — Supposto un corpo qualsivoglia, sia k la grandezza della densità in un suo punto scelto a piacere, e immaginata una parte comprendente questo punto, indichino Δm e $\Delta \tau$ la grandezza della sua massa e del suo volume. Sarà, intesa la parte convenientemente limitata:

$$\Delta m = \int_{\Delta \tau} k \, d\tau = \bar{k} \, \Delta \tau$$

con $\overline{k}$ rappresentando la grandezza della densità in un certo punto della parte. E di qui:

$$k = \lim \frac{\Delta m}{\Delta \tau},$$

il limite intendendosi collo svanire d'una sfera avente il centro nel punto considerato, e racchiudente la parte.

In altri termini:

$$\Delta m = (k + \alpha) \Delta \tau,$$

dove α, collo svanire della suddetta sfera, ha per limite o.

Noi ammetteremo che le α siano nel campo rappresentato dal corpo al tempo considerato uniformemente evanescenti; cioè che, fissato ε positivo piccolo finchè si vuole, esista ρ indipendente dai singoli punti del campo, tale che, pur di supporre il raggio della sfera minore di ρ, sia $|\alpha| < \varepsilon$, qualunque sia il punto che si considera.

In conseguenza di questa ipotesi, supposto V nel campo rappresentato dal corpo all'istante considerato continua e finita, se si concepisce questo campo decomposto con una legge qualsivoglia in parti, e s'indicano con Δm e $\Delta \tau$ la grandezza della massa e del volume della parte qualunque, con $\overline{V}$ e $\overline{k}$ il valore di V e di k in un punto qualsiasi di esso sarà:

$$\lim \Sigma \overline{V} \Delta m = \lim \Sigma \overline{k}\, \overline{V} \Delta \tau = \int_\tau V k \, d\tau,$$

ove la sommatoria abbraccia tutte le parti, e il limite s'intende collo svanire, per ogni parte, d'una sfera avente il centro in un punto della parte e racchiudente la parte medesima.

Equazione della conservazione della massa o della continuità.

§ 240. — La proposizione che la massa d'ogni parte d'un corpo naturale, nelle sue varie posizioni, si mantiene costante, espressa da

$$\frac{d \int_{\Delta \tau} k \, d\tau}{dt} = 0, \tag{1}$$

si traduce in un'importante equazione, nell'ipotesi del movimento continuo regolare, alle cui condizioni aggiungeremo d'or innanzi quella che la densità sia una funzione del tempo e delle coordinate, oltre che finita e continua, anche dotata dei coefficienti differenziali egualmente finiti e continui.

Siano x_0, y_0, z_0 e x, y, z le coordinate ordinarie d'un punto del corpo considerato al tempo t_0 e al tempo qualunque t; e immaginata una parte del corpo comprendente questo punto, indichino τ_0 e τ la grandezza del suo volume al tempo t_0 e al tempo t: $\lim\limits_{\tau=0}$ il limite collo svanire d'una sfera avente per centro detto punto nel posto che gli compete all'istante considerato e comprendente la parte: finalmente $\overline{k}$ il valore di k in un punto della parte, che sarà generalmente diverso da (x, y, z), mentre però, indicando per un momento con (k) il valore in questo punto, sarà $\lim\limits_{\tau=0} \overline{k} = (k)$. Inoltre pongasi (cfr. § 129):

$$D = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_0} & \frac{dx}{dy_0} & \frac{dx}{dz_0} \\ \frac{dy}{dx_0} & \frac{dy}{dy_0} & \frac{dy}{dz_0} \\ \frac{dz}{dx_0} & \frac{dz}{dy_0} & \frac{dz}{dz_0} \end{vmatrix},$$

per modo che (§ 107):

$$\lim_{\tau_0=0} \frac{\tau}{\tau_0} = D.$$

Da (1) si ricava:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\int\limits_{\tau} k\,dt}{\tau_0} = \frac{d}{dt}\,\frac{\overline{k}\,\tau}{\tau_0} = 0,$$

comunque piccola sia la parte considerata; quindi anche:

$$\frac{d}{dt}\lim_{\tau_0=0}\frac{\overline{k}\,\tau}{\tau_0} = \frac{d\,(k)\,D}{dt} = 0;$$

ossia, indicando ora con k la grandezza della densità nel punto (x, y, z), cioè la grandezza della densità nel punto considerato al tempo t:

$$\frac{d\,k\,D}{dt} = 0. \tag{2}$$

A questa equazione si possono dare altre forme, che giova conoscere.

Posto, come precedentemente:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

e indicati con $(x x_0)$, $(x y_0)$, $(x z_0)$, $(y x_0)$ ecc. i minori del determinante D corrispondenti a $\frac{dx}{dx_0}$, $\frac{dx}{dy_0}$, $\frac{dx}{dz_0}$, $\frac{dy}{dx_0}$ ecc. si trova colla regola di differenziazione dei determinanti:

$$\frac{dD}{dt} = \Sigma\left((x x_0) \frac{du}{dx_0} + (x y_0) \frac{du}{dy_0} + (x z_0) \frac{du}{dz_0}\right), \tag{3}$$

dove altri due termini della sommatoria si devono dedurre da quello scritto cambiando u in v e w, e x in y e z, mentre x_0, y_0, z_0 mantengono il loro posto.

Ma concependo x_0, y_0, z_0 come funzioni di x, y, z, ciò che torna permutare gli ufficii di t e di t_0, e quindi x_0, y_0, z_0 come funzioni di sè medesime composte colle x, y, z, si hanno le note relazioni:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dx_0}{dx}\frac{dx}{dx_0} + \frac{dx_0}{dy}\frac{dy}{dx_0} + \frac{dx_0}{dz}\frac{dz}{dx_0} \\ 0 &= \frac{dx_0}{dx}\frac{dx}{dy_0} + \frac{dx_0}{dy}\frac{dy}{dy_0} + \frac{dx_0}{dz}\frac{dz}{dy_0} \\ 0 &= \frac{dx_0}{dx}\frac{dx}{dz_0} + \frac{dx_0}{dy}\frac{dy}{dz_0} + \frac{dx_0}{dz}\frac{dz}{dz_0}, \end{aligned}$$

donde si ricava:

$$(x x_0) = D\frac{dx_0}{dx}, \quad (y x_0) = D\frac{dx_0}{dy}, \quad (z x_0) = D\frac{dx_0}{dz}.$$

E in virtù di queste formole e delle analoghe, che si ricavano egualmente cambiando x_0 in y_0 e z_0, la (3) dà:

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

con che la (2) si può mettere sotto la forma:

$$\frac{dk}{dt} + k\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0. \tag{4}$$

Qui il coefficiente differenziale rispetto a t suppone costanti x_0, y_0, z_0. Valendosi della (2, § 174), otteniamo col significato dei simboli a suo luogo stabilito:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{d k u}{d x} + \frac{d k v}{d y} + \frac{d k w}{d z} = 0. \tag{5}$$

§ 241. — Immaginiamo nello spazio invaso dal mobile nel corso del suo movimento una superficie chiusa fissa, e siano x, y, z le coordinate del punto qualunque del campo da essa limitato, τ la grandezza del volume di questo campo, t il valore qualunque del tempo nell'intervallo in cui il campo medesimo è occupato dal mobile. Per la (5) del precedente §:

$$\int \frac{\partial k}{\partial t} d\tau = -\int \frac{d k u}{d x} d\tau - \int \frac{d k v}{d y} d\tau - \int \frac{d k w}{d z} d\tau.$$

Quindi, pel teorema di *Gauss* (§ 68), indicando con σ la grandezza dell'area della superficie, e con n la misura del segmento di normale nel suo punto qualunque volta verso l'interno, compreso fra questo punto e la projezione ortogonale al tempo qualunque del punto del mobile che occupa il punto medesimo al tempo t (§ 139):

$$\int \frac{\partial k}{\partial t} d\tau = \int k \frac{d n}{d t} d\sigma.$$

Siano t' e t'' valori del tempo appartenenti ambedue al suddetto intervallo. Integrando membro a membro fra t' e t'', otteniamo:

$$\Big|_{t'}^{t''} \int k\, d\tau = \int_t \int_\sigma k\, dn\, d\sigma = \int_t \Sigma \pm \int_\varsigma k\, d\nu\, d\varsigma,$$

dove ν indica la misura del suddetto segmento di normale volta nel senso formante angolo acuto coll'orientazione della velocità nel punto corrispondente, al supposto tempo compreso fra t' e t', e va preso + o — secondo che questo senso è quello della normale interna o esterna, e la sommatoria abbraccia le diverse parti (ς) della superficie ove si verifica l'uno o l'altro caso.

Questa equazione, come agevolmente si riconosce, esprime che l'aumento della massa del mobile limitato dalla superficie

fissa considerata fra t' e t' è eguale alla differenza fra la massa *entrata* e la massa *uscita* fra l'uno e l'altro istante.

E poichè da essa, seguendo il cammino inverso, si ricava la (5) del § precedente, donde siamo partiti, quest'equazione si chiama comunemente " equazione della continuità ", termine a cui ci pare preferibile quello di " equazione della conservazione della massa ", o anche " della materia ".

§ 242. — Notiamo la conseguenza importante che, se in un intervallo di tempo si ha $u = v = w = 0$, sarà $\frac{dk}{dt} = 0$, cioè k costante. Ossia, " se un punto si mantiene immobile, la densità vi resta inalterata ".

§ 243. — Nel caso che esista la funzione delle velocità (φ) (§ 171), la (5, § 240) si traduce in:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{d k \frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d k \frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d k \frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0,$$

che rappresenta una relazione fra il valore d'essa funzione e quello della densità nello stesso posto, al tempo t.

E di qui, o più direttamente da (4, § 240), nell'ipotesi che k mantenga in ogni punto del mobile, in qualunque suo posto, vale a dire a qualunque tempo, lo stesso valore, per modo che $\frac{dk}{dt} = 0$, segue:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0:$$

equazione alle derivate parziali lineare del 2° ordine, a cui la funzione delle velocità deve soddisfare, e nei singoli movimenti, insieme colle condizioni proprie del caso particolare, servirà per determinarla.

Forza motrice.

§ 244. — " Forza motrice " d'un corpo ad un istante chiamiamo il vettore il cui asse è quello dell'accelerazione media del corpo allo stesso istante, e la quantità è la quantità derivata

la cui misura è il prodotto delle misure della stessa accelerazione media e della massa del corpo; per modo che la sua unità è espressa in termini delle unità fondamentali da $[l t^{-2} m]$.

Perciò, indicando con X, Y, Z le componenti della forza motrice d'un corpo al tempo t secondo tre assi coordinati ortogonali, si ha, col solito significato dei simboli, cioè rappresentando τ la grandezza del volume del corpo, x, y, z le coordinate del suo punto qualunque, e k la grandezza della densità in questo punto, tutto al tempo t:

$$X = \int k \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau, \quad Y = \int k \frac{d^2 y}{d t^2} d\tau, \quad Z = \int k \frac{d^2 z}{d t^2} d\tau.$$

§ 245. — Reciprocamente, l'accelerazione media d'un corpo ad un istante risulta il vettore avente comune l'asse colla forza motrice del corpo allo stesso istante, e quantità avente per misura il rapporto della misura della forza motrice a quella della massa del corpo: ciò che si suol definire come " forza acceleratrice „ del corpo.

Leggi fondamentali della forza motrice.

§ 246. — Posta così la definizione di forza motrice d'un corpo ad un istante, dai postulati dei corpi naturali (§§ 231, 232) scaturiscono le leggi fondamentali seguenti:

1.ª *Legge* (" dell'eguaglianza dell'azione e della reazione „). Due corpi naturali, concepiti isolati l'uno coll'altro, hanno ad ogni istante forze motrici di grandezza eguale e di senso contrario.

2.ª *Legge* (" del parallelogrammo delle forze „). Un corpo naturale, concepito isolato con due o più altri ha ad ogni istante una forza motrice eguale alla risultante delle forze motrici che avrebbe isolato con ciascuno; e concepito isolato con un corpo e accumulate due o più condizioni fisiche determinanti ciascuna una forza motrice, ha una forza motrice che è la risultante di quelle che corrispondono a queste condizioni fisiche separatamente.

Osservazione. Notiamo che, pel primo postulato dei corpi naturali, ogni parte d'un corpo naturale possiede le proprietà dei corpi naturali.

§ 247. — A *Newton* risale la nozione che il movimento d'un corpo naturale è determinato dall'intervento degli altri corpi, o che vi sia contatto, o che questo sembri mancare, ed ogni punto d'un corpo restare distinto da ogni punto di ciascun altro. Stabilito questo fatto, è naturale che le leggi fondamentali della Meccanica si debbano cercare all'esperienza nei fenomeni più generali che si verificano quando un corpo si move in presenza d'uno o di più altri; cioè in tali condizioni che il suo movimento sia da un corpo o da più corpi preponderantemente determinato, così da poter sensibilmente trascurare l'influenza d'ogni altro. E la circostanza che manchi ogni contatto è da reputarsi come favorevole a rivelare i fenomeni medesimi; poichè l'esperienza insegna che a questa ipotesi corrispondono i movimenti più semplici. Così, *Galileo* fonda la scienza del movimento colla scoperta delle leggi del movimento di un corpo abbandonato o scagliato in prossimità del suolo, prescindendo dall'aria atmosferica: mentre sarà forse impossibile con qualunque progresso descrivere con precisione il movimento d'un projettile finchè il braccio, col giuoco dei muscoli, lo spinge.

Ma famigliare e antica quanto l'uomo è la nozione che, esercitando mediante il contatto una pressione, uno sforzo, si determina e modifica in un corpo il movimento. Onde, anzichè considerare questo come un caso particolare di più difficile esame, si estese al caso generale l'idea di un'azione mutua dei corpi, paragonabile allo sforzo dei muscoli quando si lancia un projettile o si sostiene un peso, e si fondarono le leggi del movimento *a priori* su proprietà ammesse di un'azione siffatta. Così s'introdusse il concetto della " Forza „ come espressione dell'azione mutua dei corpi, e della " Massa „, espressione della quantità di materia; poichè, come si richiede di duplicare lo sforzo per alzare da terra un volume doppio d'acqua, o imprimere pari movimento ad una pietra di doppia grandezza, si congiunge in generale col concetto dell'azione di un corpo sopra un altro, per determinarne l'effetto, quello del *quantum* da esso rappresentato.

Lo sviluppo di questi concetti costituisce la storia della Meccanica, nella sua essenza; quel punto di vista che schiva ogni idea aprioristica, per invocare il puro e semplice dato dell'esperienza, pare a noi il solo capace di fornire definizioni esenti da dubbii ed equivoci. E conformemente a questo principio abbiamo posto per fondamento il fatto, cui attribuiamo il senso di risultato dell'esperienza, * delle proprietà dell'accelerazione media di due o di più corpi fra loro isolati, dalle quali abbiamo ricavato le definizioni di massa e di forza motrice, sufficienti per poter applicare senz'altro commento questi concetti. Che se si conservano i termini includenti l'idea di quantità di materia e d'azione, oltre l'omaggio alla tradizione, giova in quanto che i concetti così rigorosamente definiti collimano coi concetti famigliari designati dai termini medesimi, ove il significato di questi riesce men vago.

Quantità di moto.

§ 248. — " Quantità di moto „ di un corpo naturale ad un istante si chiama il vettore la cui componente secondo un asse qualsivoglia, indicando con λ la componente secondo lo stesso asse della velocità del punto qualunque del corpo è:

$$\int k \lambda \, d\tau ;$$

per modo che le componenti secondo i soliti tre assi cartesiani sono:

$$\int k \frac{dx}{dt} d\tau, \quad \int k \frac{dy}{dt} d\tau, \quad \int k \frac{dz}{dt} d\tau,$$

ciò che basta per definire il vettore in discorso.

* Come in altri casi simili, e per esempio in quello dei postulati della Geometria, non s'intenderà che il fatto si dimostri direttamente con un proprio esperimento, ma sibbene che riassuma un complesso di fatti direttamente rilevabili coll'esperienza, i quali se ne deducono col ragionamento, e, se occorre, col concorso d'altre ipotesi d'analoga specie.

Cfr. a proposito del metodo qui seguito, *E. Mach — Die Mechanik in ihrer Entwickelung* — Leipzig 1883 — pag. 226 e segg.

In conseguenza di questa definizione l'unità di quantità di moto risulta rappresentata mediante le unità fondamentali da $[l\, t^{-1}\, m]$.

Forza motrice nel movimento relativo. — Forze apparenti.

§ 249. — Immaginata la terna $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ d'assi mobili relativamente alla terna degli assi x, y, z, le formole (1, § 201) ci danno immediatamente:

$$\int k \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau = X_{\mathfrak{R}} + X_{\mathfrak{S}} - 2(\Upsilon_{\mathfrak{R}}\, r - Z_{\mathfrak{R}}\, q)$$

$$\int k \frac{d^2 y}{d t^2} d\tau = Y_{\mathfrak{R}} + Y_{\mathfrak{S}} - 2(Z_{\mathfrak{R}}\, p - \Xi_{\mathfrak{R}}\, r)$$

$$\int k \frac{d^2 z}{d t^2} d\tau = Z_{\mathfrak{R}} + Z_{\mathfrak{S}} - 2(\Xi_{\mathfrak{R}}\, q - \Upsilon_{\mathfrak{R}}\, p),$$

dove:

$$X_{\mathfrak{R}} = \int k \left(\frac{d^2 x_{\mathfrak{R}}}{d \mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau, \quad Y_{\mathfrak{R}} = \int k \left(\frac{d^2 y_{\mathfrak{R}}}{d \mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau, \quad Z_{\mathfrak{R}} = \int k \left(\frac{d^2 z_{\mathfrak{R}}}{d \mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau,$$

$$X_{\mathfrak{S}} = \int k \left(\frac{d^2 x_{\mathfrak{S}}}{d \mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau, \quad Y_{\mathfrak{S}} = \int k \left(\frac{d^2 y_{\mathfrak{S}}}{d \mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau, \quad Z_{\mathfrak{S}} = \int k \left(\frac{d^2 z_{\mathfrak{S}}}{d \mathrm{t}^2}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau,$$

$$\Xi_{\mathfrak{R}} = \int k \left(\frac{d x_{\mathfrak{R}}}{d \mathrm{t}}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau, \quad \Upsilon_{\mathfrak{R}} = \int k \left(\frac{d y_{\mathfrak{R}}}{d \mathrm{t}}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau, \quad Z_{\mathfrak{R}} = \int k \left(\frac{d z_{\mathfrak{R}}}{d \mathrm{t}}\right)_{\mathrm{t}=t} d\tau,$$

per modo che la forza motrice del corpo considerato al supposto istante riesce composta di tre vettori dipendenti dal movimento degli assi mobili, che passiamo ad esaminare.

Basta perciò rammentare i risultati dei §§ 175, 201 donde emerge senz'altro che $(X_{\mathfrak{R}}, Y_{\mathfrak{R}}, Z_{\mathfrak{R}})$ e $(X_{\mathfrak{S}}, Y_{\mathfrak{S}}, Z_{\mathfrak{S}})$ sono la forza motrice del corpo al tempo t nell'ipotesi che l'accelerazione del suo punto qualsivoglia (x, y, z) sia quella del corrispondente punto $\mathfrak{R}(t)$ e $\mathfrak{S}(t)$ per $\mathrm{t} = t$; mentre

$$(\Upsilon_{\mathfrak{R}}\, r - Z_{\mathfrak{R}}\, q\,,\; Z_{\mathfrak{R}}\, p - \Xi_{\mathfrak{R}}\, r\,,\; \Xi_{\mathfrak{R}}\, q - \Upsilon_{\mathfrak{R}}\, p)$$

ha misura eguale al doppio prodotto delle misure della quantità di moto del corpo nell'ipotesi che la velocità del suo punto qualunque sia quella del corrispondente punto $\mathfrak{R}(t)$ per $\mathrm{t} = t$, della

misura della velocità angolare degli assi mobili, e del seno dell'angolo dei loro assi, per modo che è zero se questo angolo è nullo o due retti; e supposto che abbia un altro valore qualunque, inteso sempre che così si chiami l'angolo concavo, preso assolutamente, l'asse è perpendicolare al piano degli assi dei due suddetti vettori, volto nel senso positivo rispetto al giro che conduce per quest'angolo dall'asse del primo a quello del secondo.

Il primo vettore, in altri termini, è la forza motrice del corpo al supposto istante nel suo movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi nella posizione a questo istante, onde si chiama la " forza motrice del movimento relativo " medesimo; il secondo è la forza motrice del corpo nel moto di strascinamento corrispondente all'istante considerato, a questo stesso istante, e si chiama perciò la " forza motrice del movimento di strascinamento ". Per quanto al terzo vettore, la sua relazione coll'accelerazione centrifuga composta gli vale il nome di " forza centrifuga composta ".

Conformemente al § 201,

$$\int k \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} d\tau, \quad \int k \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2} d\tau, \quad \int k \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2} d\tau$$

saranno le componenti del primo vettore secondo tre assi aventi l'orientazione degli assi mobili al tempo t; che se $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ si concepiscono come coordinate rispetto ad una terna d'assi qualsivoglia, le stesse espressioni rappresenteranno le componenti secondo questi assi della forza motrice al tempo t del movimento del corpo relativo agli assi mobili considerati come fissi nella posizione di quegli assi. Quindi il primo vettore si deduce immediatamente dalla forza motrice ad ogni istante del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi in una posizione qualsivoglia, insieme col movimento degli assi: mentre dal vettore stesso scaturisce senz'altro la forza motrice di questo movimento relativo, cioè del movimento del corpo qual'è percepito da un osservatore che partecipa al movimento degli assi. Rammentiamo che, pel precedente risultato, quel vettore riesce composto della forza motrice del movimento assoluto, del vettore

eguale ed opposto alla forza motrice del moto di strascinamento corrispondente all' istante considerato, e della forza centrifuga composta.

Così, ad un osservatore che partecipa al movimento degli assi il movimento d'un corpo appare come rispondente alla forza motrice del movimento assoluto, composta cogli altri due vettori suddetti, che per tal ragione si chiamano " forze apparenti del movimento relativo ".

§ 250. — Nel caso che uno degli assi della terna mobile sia fisso, e gli altri due ruotino uniformemente intorno ad esso come asse con velocità angolare di misura ω, assunto l'asse fisso per asse delle $\mathfrak{z}$, le componenti dell'eguale ed opposto alla forza motrice di strascinamento secondo tre assi aventi l'orientazione degli assi mobili all'istante considerato risultano (§ 203):

$$\omega^2 \int k\, \mathfrak{x}\, d\tau, \qquad \omega^2 \int k\, \mathfrak{y}\, d\tau, \qquad 0.$$

Quindi il vettore ha per grandezza il prodotto del quadrato della grandezza della velocità angolare, della grandezza della distanza del centro di massa dall' asse di rotazione e della grandezza della massa del corpo, e per orientazione quella del raggio perpendicolare all' asse descritto da esso al centro di massa. Esso si chiama in questo caso particolare la " forza centrifuga " del corpo all' istante considerato; e così il movimento relativo appare come corrispondente al risultante della forza motrice del movimento assoluto, della forza centrifuga, e della forza centrifuga composta.

§ 251. — Particolarmente importante è il caso che il movimento degli assi sia traslatorio.

La forza motrice del movimento relativo agli assi mobili considerati come fissi nella loro posizione ad un istante determinato, è in tal caso la stessa, a parità di tempo, qualunque sia questo istante, e perciò tutt'uno colla forza motrice del movimento qual'è percepito da un osservatore che partecipa al movimento degli assi: la forza motrice di strascinamento ha l'orientazione dell'accelerazione di un punto qualsivoglia invariabilmente unito cogli assi, e per grandezza il prodotto della sua grandezza

per quella della massa del corpo: finalmente la forza centrifuga composta è nulla.

Supposto inoltre che la velocità d'un punto qualsiasi invariabilmente unito cogli assi sia costante d'orientazione e di grandezza, anche la forza motrice di strascinamento sarà nulla. E per conseguenza, " se un punto è in movimento uniforme rettilineo, e una terna d'assi congiunta invariabilmente con esso in movimento traslatorio, la forza motrice d'un mobile nel movimento relativo a questi assi concepiti come fissi è la stessa come pel movimento assoluto ".

CAPITOLO II.

PROPRIETÀ GENERALI DEL MOVIMENTO.

Teorema del centro di massa.

§ 252. — Indicando con m la grandezza della massa d'un corpo, e con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ e X, Y, Z le coordinate ordinarie del suo centro di massa e le componenti della sua forza motrice secondo i tre assi coordinati al tempo qualunque t, pei §§ 233, 244 abbiamo:

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = Z. \qquad (1)$$

Ora, se per un momento immaginiamo il corpo decomposto in modo qualsivoglia in parti per concepirlo come il sistema di questi parti, la sua forza motrice (X, Y, Z) sarà la risultante delle forze motrici delle singole parti, e la forza motrice d'ogni parte la risultante delle forze motrici della stessa parte concepita isolata con tutte le altre parti rimanenti e coi corpi, se ve ne sono, coi quali il corpo considerato si suppone isolato. La risultante delle prime per tutte le parti è nulla, perchè le forze motrici di due parti qualunque, concepite isolate l'uno coll'altra, sono eguali ed opposte: donde viene che " la forza motrice d'un corpo è nulla se non si suppone la presenza d'altri corpi, e in ogni caso è puramente determinata da questi ".

Di questa circostanza fondamentale s'è già tratto partito; applicata alle relazioni (1), essa permette d'affermare che l'accelerazione del centro di massa d'un corpo, ad ogni istante, cioè nello stato che compete al mobile in quell'istante, è esclusivamente determinata dai corpi coi quali esso si suppone isolato: il significato della qual proposizione è quello che emerge dalle considerazioni precedenti. E si dice pure che l'accelerazione del centro di massa ad ogni istante, cioè nello stato del mobile ai singoli istanti, è esclusivamente determinata dalle forze esterne: chiamandosi per ogni parte d'un corpo " forza motrice esterna „ quella della parte stessa, concepita nel suo stato attuale, isolata coi corpi con cui si suppone isolato il corpo considerato, e " forza motrice interna „ quella della parte, concepita invece isolata colle rimanenti parti del corpo.

Questa proposizione costituisce il " teorema del centro di massa „.

Teorema della conservazione del movimento del centro di massa.

§ 253. — Supponiamo la forza motrice del corpo considerato costantemente nulla: ciò che si verificherà nel caso che il movimento sia puramente determinato dalle forze interne (§ 246). Per le (1) del precedente § 252, sarà, per ogni valore di t:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{y}}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{z}}{d t^2} = 0;$$

donde, indicando con α, β, γ, α', β', γ', sei costanti:

$$\frac{d \bar{x}}{d t} = \alpha', \qquad \frac{d \bar{y}}{d t} = \beta', \qquad \frac{d \bar{z}}{d t} = \gamma', \tag{1}$$

$$\bar{x} = \alpha + \alpha' t, \qquad \bar{y} = \beta + \beta' t, \qquad \bar{z} = \gamma + \gamma' t:$$

cioè " il movimento del centro di massa d'un corpo la cui forza motrice è costantemente nulla sarà rettilineo uniforme, e come caso particolare, quando la velocità del centro di massa ad un istante sia nulla, questo si manterrà fisso „.

Questo è il così detto " teorema della conservazione del movimento del centro di massa „.

§ 254. — Conformemente a questa proposizione e alla precedente, è necessario l'intervento di un agente esterno, cioè la presenza di corpi atti a determinare una forza motrice esterna, perchè un corpo, dopo un intervallo di quiete per breve che sia, acquisti un movimento traslatorio, o, più generalmente, qualunque movimento pel quale, ad un istante, sia in atto di movimento traslatorio (non nullo); il centro di massa si mantiene fisso in ogni movimento che nasce dal riposo, cioè dopo un intervallo comunque breve d'immobilità, per una modificazione delle forze interne, che non modifica invece le esterne; e quando, per una variazione delle forze interne venga modificato il movimento delle singole parti, se non mutano per questo le forze esterne, non cambierà il movimento del comun centro di massa. Queste applicazioni saranno meglio comprese in seguito, quando potremo invocare l'esempio di qualche effettivo movimento, precedentemente indagato. Notiamo qui che il comun centro di massa di tutti i corpi dell'universo dovrà necessariamente aver movimento uniforme rettilineo, o mantenersi immobile; e che ciò sta parimente pel comun centro di massa dei corpi componenti il sistema solare, ammesso che sia insensibile l'influenza delle stelle.

§ 255. — Alle (1, § 252) si può dare la forma:

$$\frac{d}{dt}\int k\,\frac{dx}{dt}\,d\tau = X, \qquad \frac{d}{dt}\int k\,\frac{dy}{dt}\,d\tau = Y, \qquad \frac{d}{dt}\int k\,\frac{dz}{dt}\,d\tau = Z;$$

e alle (1, § 253):

$$\int k\,\frac{dx}{dt}\,d\tau = a, \qquad \int k\,\frac{dy}{dt}\,d\tau = b, \qquad \int k\,\frac{dz}{dt}\,d\tau = c,$$

dove a, b, c sono nuove costanti. Altra forma dei precedenti teoremi, che giova notare pel confronto col seguito, sotto la quale si chiamano qualche volta il " teorema della quantità di moto " e il " teorema della conservazione della quantità di moto ".

1.° Postulato della forza elementare.

§ 256. — Ammetteremo che, *per ogni condizione fisica* (§ 232), concepiti due corpi isolati, il vettore la cui orientazione

è quella della forza motrice d'uno di essi, e la grandezza il rapporto della grandezza della forza motrice medesima al prodotto di quelle delle masse dei due corpi, abbia un certo limite dipendente dalla posizione dei centri di massa dei due corpi, e, in generale, dalla loro velocità, collo svanire del raggio d'una sfera capace di contenere ciascun corpo, e, quando sia prescritto che la mutua distanza dei centri di massa resti superiore ad un certo termine, anche semplicemente collo svanire del rapporto del raggio di detta sfera a questa mutua distanza.

Il vettore funzione di due punti, e, se occorre, delle loro velocità, la cui orientazione è quella del suddetto limite, e la grandezza il prodotto della sua grandezza per quelle di due masse *arbitrarie*: debitamente distinto il punto corrispondente al centro di massa del corpo cui si riferisce la suddetta forza motrice — punto, cui si dirà riferirsi il vettore in discorso — e stabilito che a questo punto corrisponda una delle due masse, mentre l'altra corrisponde al secondo punto: si chiama la "forza elementare„ relativa alla supposta condizione fisica.

Indicando con m, m' le grandezze delle due masse, di cui m corrisponda al punto cui si riferisce la forza elementare, e le componenti della forza elementare medesima con $m\,m'\,\mathsf{X}$, $m\,m'\,\mathsf{Y}$, $m\,m'\,\mathsf{Z}$, la forza motrice d'un corpo la cui massa abbia grandezza m, e il centro di massa sia il punto suddetto, concepito isolato con un corpo, la cui massa abbia grandezza m', e il centro di massa sia il secondo punto, avrà per componenti:

$$m\,m'\,(\mathsf{X}+\alpha), \qquad m\,m'\,(\mathsf{Y}+\beta), \qquad m\,m'\,(\mathsf{Z}+\gamma),$$

dove α, β, γ svaniscono col raggio d'una sfera capace di contenere ciascuno dei due corpi, e nel debito caso, collo svanire del rapporto del raggio di questa sfera alla mutua distanza dei centri di massa.

Espressione della forza motrice mediante la forza elementare.

§ 257. — Concepiscasi un corpo C isolato con un corpo C', o, ciò che non muta per nulla il ragionamento, con più corpi formanti un sistema, che chiameremo egualmente il corpo C'.

Immaginiamo il primo corpo decomposto in modo qualunque in parti, e indichino $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ le componenti della forza motrice d'una sua parte qualsivoglia. Sarà:

$$\int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \Sigma \Delta X, \quad \int k \frac{d^2 y}{dt^2} d\tau = \Sigma \Delta Y, \quad \int k \frac{d^2 z}{dt^2} d\tau = \Sigma \Delta Z,$$

dove la sommatoria s'intende abbracciare tutte le parti.

Immaginiamo decomposto in parti anche il secondo corpo C', e indichiamo con $\Delta X_e, \Delta Y_e, \Delta Z_e$ le componenti della forza motrice della suddetta parte di C, concepita isolata con una parte qualunque di C', e con $\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$, le componenti della forza motrice della stessa parte, concepita isolata con un'altra parte qualsivoglia di C. Sarà:

$$\begin{aligned}\Delta X &= \bar{\Sigma} \Delta X_i + \Sigma' \Delta X_e, \\ \Delta Y &= \bar{\Sigma} \Delta Y_i + \Sigma' \Delta Y_e, \\ \Delta Z &= \bar{\Sigma} \Delta Z_i + \Sigma' \Delta Z_e,\end{aligned}$$

dove $\bar{\Sigma}$ e Σ' abbracciano rispettivamente tutte le parti del corpo C che non sono la considerata, e tutte quelle del corpo C'. Per conseguenza:

$$\int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \Sigma \bar{\Sigma} \Delta X_i + \Sigma \Sigma' \Delta X_e,$$

la prima delle quali doppie somme sappiamo aver valore zero (§ 246), e le due relazioni analoghe.

Il secondo membro è, come il primo, indipendente dalla decomposizione dei due corpi. Quindi si può scrivere:

$$\int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \lim \Sigma \lim \bar{\Sigma} \Delta X_i + \lim \Sigma \lim \Sigma' \Delta X_e,$$

dove $\lim \Sigma$, $\lim \bar{\Sigma}$, $\lim \Sigma'$ indicano i limiti collo svanire del raggio d'una sfera comprendente le singole parti dei due corpi.

Indichino Δm la grandezza della massa d'una parte del corpo C, il cui centro di massa sia il punto (x, y, z) del corpo medesimo: e $\Delta m_{,}$, $\Delta m'$ quelle d'un'altra parte qualunque dello stesso corpo, il cui centro di massa sia $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$, e della parte qualunque del corpo C', il cui centro di massa sia (x', y', z'). Pel postulato della forza elementare (§ 256), sarà:

$$\Delta X_i = \Delta m \Delta m_{,} (X + \alpha), \Delta Y_i = \Delta m \Delta m_{,} (Y + \beta), \Delta Z_i = \Delta m \Delta m_{,} (Z + \gamma),$$
$$\Delta X_e = \Delta m \Delta m' (X + \alpha), \Delta Y_e = \Delta m \Delta m' (Y + \beta), \Delta Z_e = \Delta m \Delta m' (Z + \gamma),$$

dove il punto cui la forza elementare si riferisce è in ogni caso (x, y, z), e l'altro $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ nelle prime tre, e (x', y', z') nelle tre rimanenti, mentre α, β, γ in ambedue le terne rappresentano variabili evanescenti col raggio delle sfere suddette.

Ammettiamo che α, β, γ siano nel campo rappresentato da ciascuno dei due corpi al tempo t uniformemente evanescenti (§ 239), oltre di che **X**, **Y**, **Z** siano funzioni finite e generalmente continue. * In tal caso:

$$\int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \lim \Sigma \Delta m \lim \Sigma \mathbf{X} \Delta m_{,} + \lim \Sigma \Delta m \lim \Sigma' \mathbf{X} \Delta m'$$

e le analoghe: ossia, indicando con $k_{,}$ e k' la grandezza della densità in $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ e (x', y', z'), e con $\tau_{,} = \tau$, e τ' la grandezza del volume del campo rappresentato dal corpo C e dal corpo C' al tempo t:

$$\left.\begin{aligned} \int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau &= \int k X d\tau, \\ \int k \frac{d^2 y}{dt^2} d\tau &= \int k Y d\tau, \\ \int k \frac{d^2 z}{dt^2} d\tau &= \int k Z d\tau, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$X = X_i + X_e, \quad Y = Y_i + Y_e, \quad Z = Z_i + Z_e,$$

$$X_i = \int k_{,} \mathbf{X} d\tau_{,}, \quad Y_i = \int k_{,} \mathbf{Y} d\tau_{,}, \quad Z_i = \int k_{,} \mathbf{Z} d\tau_{,},$$

$$X_e = \int k' \mathbf{X} d\tau', \quad Y_e = \int k' \mathbf{Y} d\tau', \quad Z_e = \int k' \mathbf{Z} d\tau'.$$

Forza acceleratrice in un punto totale, esterna e interna.

§ 258. — I tre vettori (X, Y, Z), (X_e, Y_e, Z_e) e (X_i, Y_i, Z_i) si chiamano la "forza acceleratrice nel punto qualunque (x, y, z) del corpo C, concepito isolato col corpo C', al tempo t" rispettivamente "totale" — qualifica che anche si ommette — "esterna" e "interna".

* Scelto (x, y, z), la definizione originaria delle tre funzioni supporre $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ distinto da esso. Ma, quando ci piaccia, potremo sempre supporre che, col tendere del secondo posto al primo, ammettano il limite, e assumerlo per valore nell'ipotesi che i due posti coincidano.

Funzione delle forze.

§ 259. — " Funzione delle forze „ per rispetto ad una determinata specie di forza acceleratrice nei singoli punti di un corpo si dice, quando esiste, una funzione delle coordinate dei punti del corpo al tempo considerato, e, se capita, del tempo, tale che il suo coefficiente differenziale in un punto, secondo un asse qualsivoglia, è la componente secondo questo asse della forza acceleratrice della supposta specie nel punto considerato (§ 62).

Basta perciò che, indicando con X, Y, Z le componenti secondo i soliti assi coordinati della forza acceleratrice, di qualunque specie sia, nel punto le cui coordinate al supposto tempo t sono x, y, z — per modo che (x, y, z) è il posto qualunque del campo rappresentato dal mobile al tempo t — sia:

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz},$$

dove V dinota, ad ogni istante, una certa funzione delle x, y, z, e nel corso del movimento, in generale, una funzione di queste variabili e del tempo t.

§ 260. — Supponiamo che la forza elementare corrispondente alla supposta forza acceleratrice sia tale che, indicando per un momento con x, y, z le coordinate del punto cui si riferisce, e con $\mathbf{V}$ una funzione finita e continua delle coordinate di questo punto, del secondo, e, per avventura, del tempo, sia:

$$\mathbf{X} = \frac{d\mathbf{V}}{dx}, \qquad \mathbf{Y} = \frac{d\mathbf{V}}{dy}, \qquad \mathbf{Z} = \frac{d\mathbf{V}}{dz}.$$

Avremo in tal caso, attribuendo ora a x, y, z il precedente significato di coordinate del punto del corpo considerato cui corrisponde la forza acceleratrice (X, Y, Z), oltre di che indicando con τ' e k' la grandezza del volume e della densità del corpo a cui si attribuisce di determinare in quello la specie in discorso di forza acceleratrice:

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz}$$

$$V = \int k' \mathbf{V} \, d\tau'.$$

Accelerazione del centro di massa.

§ 261. — Si ha:

$$\int k X_i d\tau = 0, \quad \int k Y_i d\tau = 0, \quad \int k Z_i d\tau = 0,$$

poichè le doppie somme di cui i primi membri sono i limiti, secondo il precedente calcolo, hanno costantemente valor zero.

Quindi:

$$\int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \int k X_e d\tau,$$

$$\int k \frac{d^2 y}{dt^2} d\tau = \int k Y_e d\tau,$$

$$\int k \frac{d^2 z}{dt^2} d\tau = \int k Z_e d\tau,$$

ossia:

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \int k X_e d\tau, \quad m \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \int k Y_e d\tau, \quad m \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = \int k Z_e d\tau,$$

che traducono, nelle presenti ipotesi, il noto teorema del movimento del centro di massa (§ 252).

Accelerazione d'ogni punto.

§ 262. — Le tre (1, § 257), pur d'intendere che il corpo considerato possa venire in qualsiasi modo a contatto dei corpi esterni, stanno per ogni parte comunque piccola del corpo C: vale a dire che sussistono quelle relazioni, intendendo che il campo cui gl'integrali sono estesi sia una parte qualunque del corpo, anzichè tutto il corpo, *collo stesso valore di X, Y, Z in ogni punto.* Difatti, lo stesso ragionamento si applicherà alla parte, soltanto che rispetto ad essa fungerà da corpo esterno l'insieme del precedente C', considerato come esterno rispetto a tutto il corpo, e della parte complementare del corpo; donde segue che la forza acceleratrice esterna in ogni punto sarà composta di quelle che

provengono dal corpo C', come per tutto il corpo, e dalla parte complementare, mentre la forza acceleratrice interna sarà composta dell'eguale ed opposta a quest'ultima, e di quella che corrisponde a tutto il corpo.

In altri termini, fissato un punto qualunque del corpo C, si ha:

$$\int k\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X\right)d\tau = 0, \quad \int k\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y\right)d\tau = 0, \quad \int k\left(\frac{d^2 z}{dt^2} - Z\right)d\tau = 0$$

comunque limitato sia l'intorno del punto a cui gl'integrali s'intendono estesi. E per conseguenza (§ 66):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z, \tag{1}$$

dove i simboli appartengono al punto considerato qualsivoglia.

Potenza di un sistema di forze applicato ai punti di un corpo, corrispondente ad un atto di movimento.

§ 263. — Il vettore (kX, kY, kZ), intendendo che (X, Y, Z) rappresenti una forza acceleratrice in un punto, si chiamerà la corrispondente " forza specifica „ nello stesso punto. E concepita per ogni punto d'un corpo una forza specifica, l'insieme dei vettori applicati definiti dalle singole forze specifiche e relativi punti si chiamerà un " sistema di forze applicato ai punti di un corpo „.

§ 264. — " Potenza d'un sistema di forze applicato ai punti di un corpo corrispondente ad un atto di movimento „ — s'intende, al supposto istante — chiamiamo la quantità la cui misura è:

$$\int k\, R\, \mathrm{v} \cos(R\, \mathrm{v})\, d\tau, \tag{1}$$

dove k indica al solito la grandezza della densità nel punto qualunque del corpo di cui x, y, z sono le coordinate al supposto istante, R e v rappresentano la misura della forza specifica e della velocità in questo punto, e $\cos(R\mathrm{v})$ il coseno dei loro assi; ossia:

$$\int k\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)d\tau. \tag{2}$$

Conformemente a ciò:

$$R\,v \cos(Rv) = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}$$

si chiamerà, quando occorre, la potenza della forza acceleratrice (X, Y, Z).

Riconosceremo ben presto l'utilità di questa espressione, e la ragione del nome col quale traduciamo l'*actio agentis* di *Newton.** Più comunemente usato è il termine " momento „, che trae origine da *Galileo*, ma può dar luogo oggidì a qualche confusione per l'altro significato che gli è attribuito.

§ 265. — La potenza d'un sistema di forze applicato ai punti di un corpo, per la premessa definizione, è una quantità derivata, la cui unità è rappresentata da $[l^2\,t^{-3}\,m]$.

§ 266. — " Risultante „ o " composto „ di due o più altri si dice un sistema di forze applicato ai punti di un corpo quando la forza acceleratrice d'ogni punto è composta delle forze acceleratrici corrispondenti a ciascuno di essi.

Apparisce immediatamente dalla (2, § 264) che la potenza d'un sistema di forze composto di più altri ha per misura la somma delle misure delle potenze di questi corrispondenti allo stesso atto di movimento. Infatti, supposto

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = \Sigma Z_i$$

la (2, § 264) acquista senz'altro la forma:

$$\Sigma \int k \left(X_i \frac{dx}{dt} + Y_i \frac{dy}{dt} + Z_i \frac{dz}{dt} \right) d\tau .$$

Potenza delle forze interne ed esterne rispettivamente si chiama quella che corrisponde al sistema delle forze acceleratrici interne ed esterne (§ 258). Quindi, in particolare, la potenza d'un sistema di forze ha per misura la somma delle potenze delle forze interne ed esterne corrispondenti allo stesso atto di movimento.

---

* *Principia.* — Colonia Allobr. 1760 — Axiomata, Lex III, Scholium. Cfr. *Thomson* e *Tait, Natural Philosophy.* — London, 1879 — § 263, dove *actio agentis* è tradotto con " activity „.

§ 267. — Analogamente, scaturisce dalla (2, § 264) che se l'atto di movimento considerato è composto di più altri (§ 149), la potenza d'un sistema di forze ad esso corrispondente avrà per misura la somma delle misure delle potenze dello stesso sistema di forze corrispondenti ai singoli atti di movimento componenti.

§ 268. — La potenza di un sistema di forze applicato ai punti di un corpo corrispondente ad un atto di movimento che si concepisce come puramente virtuale (§ 180) si distingue, quando giova, col termine di " potenza virtuale ", e la sua misura, coi simboli stabiliti per distinguere la velocità virtuale, si rappresenta con

$$\int k\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,d\tau .$$

Teorema della forza viva.

§ 269. — Dalle equazioni (1, § 262) segue immediatamente:

$$\int k\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)d\tau$$
$$=\int k\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)d\tau ;$$

ossia, indicando come nel § 264 con v la misura della velocità al tempo t del punto qualunque del mobile, le cui coordinate allo stesso tempo sono x, y, z, e posto:

$$T=\frac{1}{2}\int k\,\mathrm{v}^2\,d\tau ,$$

sotto altra forma:

$$\frac{dT}{dt}=\int k\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)d\tau .$$

La quantità derivata la cui misura è T (non mai negativa), per modo che la relativa unità è espressa colle unità principali da $[l^2\,t^{-2}\,m]$, si chiama la " forza viva del corpo all'istante considerato ".

Così troviamo che, " ad ogni istante, la potenza del sistema delle forze applicato ai punti di un corpo è eguale al coefficiente differenziale della forza viva rispetto al tempo, pel valore che segna l'istante considerato „. E questa è una prima forma del " teorema della forza viva „.

§ 270. — Si deduce di qui senz'altro:

$$T - T_0 = \int_{t_0}^{t} dt \int k \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) d\tau$$

$$= \int k\, d\tau \int_{t_0}^{t} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int k\, d\tau \int (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz),$$

dove si passa dal secondo al terzo membro in virtù del § 221, e nel quarto membro è sottintesa la variabile mediante la quale si determina ad ogni istante la posizione del punto (x, y, z) (cfr. §§ 71, 72).

La quantità la cui misura è:

$$\int (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{s_0}^{s} \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds = \int_{s_0}^{s} R \cos (R\, s)\, ds,$$

dove s indica la misura dell'arco di trajettoria del punto considerato compreso fra la sua posizione (x, y, z) al tempo t e una certa origine, si chiama il " lavoro della forza acceleratrice (X, Y, Z) corrispondente al movimento del relativo punto dal posto al tempo t_0 al posto al tempo t; e analogamente la quantità la cui misura è:

$$\int k\, d\tau \int (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz), \qquad (2)$$

e quindi l'unità di misura rappresentata da $[l^2\, t^{-2}\, m]$, come per la forza viva, si chiama il " lavoro del sistema di forze applicato

ai punti del corpo, corrispondente al movimento del corpo medesimo dalla sua posizione al tempo t_0 a quella al tempo t_n.

Questo lavoro risulta eguale al corrispondente incremento della forza viva. E in ciò consiste il teorema della forza viva nella sua forma ordinaria.

§ 271. — Come per la potenza, il lavoro d'un sistema di forze applicato ai punti di un corpo corrispondente al movimento del corpo da una posizione ad un'altra, quando il sistema di forze è composto di più altri, ha per misura la somma delle misure dei lavori dei singoli sistemi componenti corrispondenti allo stesso movimento.

Così, se L_1, L_2 sono le misure dei lavori di due sistemi di forze, dei quali è risultante il sistema applicato ai punti di un corpo, sarà pel precedente teorema:

$$L_1 = T - T_0 - L_2;$$

cioè il lavoro di un sistema eguale alla somma dell'incremento della forza viva e del lavoro eguale ed opposto a quello dell'altro sistema; che se l'incremento della forza viva è nullo:

$$L_1 = - L_2,$$

e i lavori dei due sistemi sono eguali ed opposti.

Lavoro in alcuni casi semplici.

§ 272. — Supposto che ad ogni istante siano eguali per tutti i punti la velocità — per modo che il corpo in movimento traslatorio (§ 143) — e la forza acceleratrice, la misura del lavoro, per (2, § 270), risulta espressa da:

$$m\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

indicando con m la grandezza della massa del corpo: e cioè il prodotto della grandezza della massa, per la misura del lavoro della forza acceleratrice d'un punto qualsivoglia del corpo corrispondente al movimento di questo punto fra i due istanti considerati.

Supposto inoltre invariabile col tempo la forza acceleratrice e l'orientazione della velocità, la (1, § 264), insieme colla precedente espressione, fornisce per misura del lavoro:

$$m\, R \cos \alpha\, s,$$

dove s indica la grandezza del segmento compreso fra le posizioni estreme d'un punto qualsivoglia, R quella della forza acceleratrice, e α l'angolo della forza acceleratrice e della velocità, ossia della forza acceleratrice e d'un asse avente l'orientazione costante del movimento dei singoli punti: per modo che la misura medesima riesce il prodotto della componente della forza motrice secondo detto asse per la grandezza del segmento descritto da ogni punto fra gli istanti a cui il lavoro si riferisce.

§ 273. — Ognuno può riconoscere come questo complesso di risultati appaghi l'idea famigliare del lavoro, altra di quelle alle quali la Meccanica si riserba di sostituire un concetto preciso: per modo che il confronto non si può fare se non nel senso di rilevare quanto questo concetto, come esattamente si definisce, ritrae da quell'idea, qual'è generalmente intesa.

§ 274. — Notiamo che la potenza di un sistema di forze applicato ai punti d'un corpo corrispondente ad un atto di movimento risulta aver per misura il coefficiente differenziale di quella del lavoro dello stesso sistema di forze corrispondente al movimento dalla posizione ad un istante determinato alla posizione all'istante qualunque, rispetto al tempo, pel valore che segna il supposto istante. Nell'ipotesi che detto lavoro sia proporzionale al tempo impiegato dal mobile per passare dalla prima alla seconda posizione, la potenza sarà quindi semplicemente il lavoro per unità di tempo. Questo è ciò che nella Meccanica Applicata si chiama " la forza a cui una macchina lavora ", e con termine più proprio, appunto " potenza ".

Forza viva d'un mobile in atto traslatorio e rotatorio.

§ 275. — Nel caso dell'atto traslatorio, indicando con m e v la grandezza della massa e della velocità dell'atto traslatorio supposto (§ 150), si ha:

$$T = \frac{1}{2}\, m v^2.$$

§ 276. — Nel caso dell'atto rotatorio, indicando con ρ e ω la grandezza della distanza del punto qualunque del corpo dall'asse di rotazione e della velocità angolare, si ha del pari immediatamente (§ 151):

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \int k \rho^2 d\tau.$$

Momento d'inerzia.

§ 277. — La quantità di cui $\int k \rho^2 d\tau$ è la misura, e per conseguenza l'unità di misura rappresentata da $[l^2 m]$, si chiama il " momento d'inerzia „ del corpo considerato " rispetto alla retta la cui distanza dal punto qualunque ha per grandezza ρ „ — il precedente asse di rotazione — la qual retta, presa in un senso o nell'altro, si chiama l' " asse del momento d'inerzia „.

Poniamo:

$$\int k \rho^2 d\tau = K.$$

È facile vedere come questa quantità varia, a parità di direzione dell'asse, colla sua posizione, e fissato un punto dell'asse, colla direzione medesima.

§ 278. — Difatti, immaginati in primo luogo due assi paralleli, prendasi l'uno per asse delle z, e siano a, b le coordinate del punto d'intersezione dell'altro col piano xy. I momenti d'inerzia rispetto ai due assi si potranno rappresentare con:

$$K = \int k (x^2 + y^2) d\tau, \qquad K' = \int k \left((x-a)^2 + (y-b)^2\right) d\tau.$$

E di qui:

$$K' = K + m(a^2 + b^2) - 2a\int k x d\tau - 2b\int k y d\tau$$
$$= K + m\delta(\delta - 2\varepsilon \cos\varphi),$$

dove δ dinota la grandezza della distanza mutua dei due assi, ε quella della distanza del centro di massa del corpo dal primo asse (cui corrisponde K), e $\cos\varphi$ il coseno dell'angolo dei semi-

piani terminati al primo asse passanti pel secondo asse e pel centro di massa.

Se il primo asse passa pel centro di massa si ha di qui:

$$K' = K + m\,\delta^2,$$

per cui, " per ogni direzione, all'asse passante pel centro di massa corrisponde il momento d'inerzia minimo. „

§ 279. — In secondo luogo, supposto fissato un punto pel quale l'asse deve passare, assumiamolo per origine delle coordinate, e scelta comunque la direzione degli assi coordinati, indichino α, β, γ i coseni di direzione per rispetto ad essi dell'asse cui corrisponde il momento d'inerzia K. Sarà:

$$\begin{aligned} K &= \int k\left(x^2 + y^2 + z^2 - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2\right) d\tau \\ &= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta, \end{aligned} \qquad (1)$$

$$A = \int k\,(y^2 + z^2)\,d\tau,\quad B = \int k\,(z^2 + x^2)\,d\tau,\quad C = \int k\,(x^2 + y^2)\,d\tau,$$

$$D = \int k\,y\,z\,d\tau,\qquad E = \int k\,z\,x\,d\tau,\qquad F = \int k\,x\,y\,d\tau.$$

E così A, B, C sono le grandezze dei momenti d'inerzia per rispetto agli assi delle x, delle y e delle z: mentre D, E, F si definiscono come misura di quantità (parimente corrispondenti all'unità $[l^2 m]$) che si chiamano il " momento composto rispetto alla coppia di piani xy e xz, yz e yx, zx e zy „ rispettivamente.

Questa è la relazione cercata, donde apparisce che, pei singoli assi uscenti dal punto considerato, K sarà l'inverso del quadrato del raggio egualmente diretto della quadrica la cui equazione è

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1:$$

ellissoide col centro nel punto, che si chiama il corrispondente " ellissoide d'inerzia „. Gli assi di questo ellissoide si dicono gli " assi principali d'inerzia „ nel punto, e i corrispondenti momenti d'inerzia, dei quali uno sarà massimo e l'altro minimo, i " momenti d'inerzia principali „, " massimo „, " medio „ e " minimo „.

Casi particolari sono quelli che l'ellissoide sia di rotazione, o si riduca ad una sfera; nel primo dei quali l'asse di figura sarà un asse principale, e ad ogni asse ad esso perpendicolare

competerà un egual momento d'inerzia, mentre nel secondo il momento d'inerzia sarà, qualunque sia l'asse, lo stesso.

Così, l'insieme dei momenti d'inerzia rispetto ai singoli assi passanti per un punto è determinato in quel semplice modo dalla terna vettoriale (§ 54) di cui il suddetto ellissoide è la quadrica; e cioè la terna vettoriale le cui direzioni sono quelle degli assi principali d'inerzia relativi al punto e le quantità i momenti principali d'inerzia corrispondenti — ossia i cui parametri rispetto ai supposti assi coordinati sono A, B, C, $-D$, $-E$, $-F$.

Indicando con P, Q, R le grandezze dei momenti d'inerzia principali nel punto considerato, e intendendo che α, β, γ rappresentino i coseni di direzione dell'asse del momento di cui K è la grandezza, per rispetto agli assi principali d'inerzia nello stesso punto, la (1) diventa:

$$K = P\alpha^2 + Q\beta^2 + R\gamma^2.$$

§ 280. — Secondo quest'ultima relazione, si ha per la forza viva d'un corpo in atto rotatorio (§ 276), indicando con P, Q, R le grandezze dei momenti d'inerzia principali in un punto qualsiasi dell'asse di rotazione, e con $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ le componenti della velocità angolare secondo gli assi principali d'inerzia nello stesso punto:

$$T = \frac{1}{2}(P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2 + R\mathfrak{r}^2).$$

Forza viva d'un corpo in atto rototraslatorio.

§ 281. — Siano $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ le componenti della velocità dell'atto traslatorio componente, e della velocità angolare dell'atto rotatorio, secondo una terna d'assi coordinati ortogonali. Posta l'origine in un punto dell'asse di rotazione, le componenti della velocità del punto ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) saranno (§ 159):

$$\mathfrak{l} + \mathfrak{q}\mathfrak{z} - \mathfrak{r}\mathfrak{y}; \qquad \mathfrak{m} + \mathfrak{r}\mathfrak{x} - \mathfrak{p}\mathfrak{z}, \qquad \mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{y} - \mathfrak{q}\mathfrak{x}.$$

E di qui si ricava:

$$\begin{gathered} 2\,T = m(\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2) + \\ + 2\,m\big((\mathfrak{m}\mathfrak{r} - \mathfrak{n}\mathfrak{q})\mathfrak{x} + (\mathfrak{n}\mathfrak{p} - \mathfrak{l}\mathfrak{r})\mathfrak{y} + (\mathfrak{l}\mathfrak{q} - \mathfrak{m}\mathfrak{p})\mathfrak{z}\big) + \\ + A\mathfrak{p}^2 + B\mathfrak{q}^2 + C\mathfrak{r}^2 - 2\,D\mathfrak{q}\mathfrak{r} - 2\,E\mathfrak{r}\mathfrak{p} - 2\,F\mathfrak{p}\mathfrak{q}, \end{gathered}$$

dove $\overline{\mathfrak{x}}, \overline{\mathfrak{y}}, \overline{\mathfrak{z}}$ indicano le coordinate del centro di massa, e gli altri simboli hanno il precedente significato.

Notiamo che la seconda linea si annulla nel caso dell'atto di movimento elicoidale (al quale è sempre riducibile un atto rototraslatorio), e in ogni caso se l'origine è il centro di massa; mentre la terza linea, se si assumono per assi coordinati gli assi principali d'inerzia relativi all'origine, si riduce a:

$$P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2 + R\mathfrak{r}^2.$$

Forza viva nel movimento relativo.

§ 282. — La considerazione della forza viva d'un corpo nel suo movimento relativo ad una terna d'assi mobili considerati come fissi conduce ad un risultato semplice nell'ipotesi che il movimento degli assi sia traslatorio.

In tal caso, supposti gli assi fissi coll'orientazione costante degli assi mobili, abbiamo, indicando con α, β, γ al solito le coordinate dell'origine degli assi mobili, e con x, y, z e ξ, η, ζ le coordinate d'uno stesso punto per rispetto agli assi fissi e mobili:

$$x = \alpha + \xi, \qquad y = \beta + \eta, \qquad z = \gamma + \zeta,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}.$$

Quindi:

$$T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 + \mathrm{T} + m\, \mathrm{v}\, \upsilon \cos (\mathrm{v}\upsilon);$$

dove v e υ sono le misure delle velocità del movimento degli assi e del centro di massa del corpo nel suo movimento relativo agli assi considerati come fissi: cos (vυ) il coseno dell'angolo dei loro assi: e T, la grandezza della forza viva del corpo nel movimento relativo medesimo.

Ne viene, nell'ipotesi che il centro di massa serbi posizione invariata rispetto agli assi mobili:

$$T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 + \mathrm{T}.$$

Teorema della conservazione dell'energia.

§ 283. — La forza viva ad un istante si chiama anche l' " energia attuale „ del corpo all'istante medesimo.

Questo termine trae origine dalla circostanza che, se s'immagina, in un intervallo di tempo che comincia coll'istante considerato, un movimento per cui alla fine la forza viva si riduca a zero, il lavoro del sistema delle forze applicato ai punti del corpo corrispondente al movimento dalla posizione al primo istante alla posizione al secondo sarà negativo e di grandezza eguale a quello della forza viva al primo istante (§ 270). Dalla definizione del lavoro segue che, quando la misura è negativa, concepito il corpo decomposto nelle parti ai cui punti corrisponde un lavoro della forza acceleratrice (§ 270) positivo e negativo, predominerà il contingente fornito dalle seconde; e concepito per ogni punto di queste decomposto l'intervallo considerato nei tratti ai cui istanti corrisponde angolo acuto e angolo ottuso fra le orientazioni della forza acceleratrice e della velocità, predominerà il contingente introdotto dai secondi. Ora, il senso del movimento d'un punto ad un istante, quando l'angolo formato dall'orientazione della velocità con quella della forza acceleratrice è ottuso, s'intende discorde da quello della forza acceleratrice. Conformemente a ciò, quando il lavoro ha misura negativa, s'intende che il mobile, nel relativo intervallo di tempo, *superi* le forze determinanti il movimento, in virtù delle sue condizioni al principio dell'intervallo, che gli conferiscono la necessaria *energia*. E questa energia, per la semplice relazione col lavoro ora rammentata, si concepisce rappresentata dalla forza viva.

Dallo stesso punto di vista, il lavoro corrispondente al movimento del corpo dalla posizione ad un istante alla posizione ad un altro, quando è negativo, si concepisce come un lavoro *contrario alle forze*, prodotto mediante la corrispondente diminuzione d'energia, mentre quando è positivo si concepisce come un lavoro *compiuto dalle forze*, che produce il corrispondente aumento d'energia.

§ 284. — Una variabile che riceve un valore per ogni posizione d'un mobile si dice una funzione della posizione del mobile; che se questa posizione si concepisce definita da un insieme di variabili indipendenti, è chiaro che essa sarà una funzione di queste variabili. *

§ 285. — Supponiamo che, con una condizione fisica, esista una funzione della posizione del mobile tale che il lavoro del sistema di forze applicato ai punti del mobile corrispondente al movimento dalla posizione ad un istante alla posizione ad un altro, qualunque siano questi istanti, abbia per misura il suo incremento pel passaggio dalla prima alla seconda posizione. Indicandola con W, sarà pel teorema della forza viva (§ 270):

$$T - T_0 = W - W_0,$$

ossia:

$$T - W = T_0 - W_0,$$

che si può scrivere:

$$T - W = Cost.$$

Ne viene che ogni diminuzione o accrescimento di $-W$ è accompagnato da un accrescimento o diminuzione di T d'egual grandezza; e conformemente a ciò la quantità di cui $W_1 - W$ è la misura, indicando W_1 il più gran valore che acquista W nel corso del movimento, si concepisce tale che a spese d'una sua diminuzione si produce un pari importo d' energia attuale, per modo che il suo valore ad ogni istante rappresenta il totale aumento d'energia attuale di cui il corpo è suscettibile, mentre a spese d'una diminuzione d'energia attuale si produce un pari importo di essa, e il valore dell'energia attuale ad ogni istante rappresenta il suo massimo accrescimento possibile. Per tal ragione essa si chiama l' " energia potenziale „ del corpo al supposto istante; stabilito il qual termine, per la precedente relazione, nelle relative ipotesi, il corpo possiede ad ogni istante un'energia potenziale, e la somma di essa e dell' energia attuale, — detta l' " energia totale „ — ha un valore costante.

* Gioverà rammentare che la posizione d'un corpo s'intende definita da quella di tutti i suoi punti; come pure il vincolo esistente fra questa posizione e la densità (§§ 240-243).

Questo è il “ teorema della conservazione dell'energia „.

§ 286. — Per immediata conseguenza, quando si verifica il teorema della conservazione dell'energia, l'energia attuale riprende lo stesso valore ogniqualvolta il corpo riprende la stessa posizione: e se ai due estremi d'un intervallo di tempo la posizione del corpo è la stessa, l'incremento dell'energia attuale, e il lavoro delle forze applicate ai punti del corpo corrispondenti al movimento dalla posizione al principio alla posizione alla fine dell'intervallo sono nulli.

Ne viene che l'ipotesi della conservazione dell'energia esclude la possibilità del così detto *perpetuum mobile*: cioè d'un corpo, o d'un sistema di corpi, e, coi termini della pratica, d'una macchina, tale che ogni suo ritorno allo stato iniziale sia accompagnato da una produzione di forza viva, o di lavoro, o dell'uno e l'altro insieme. Che se ogni ritorno d'un corpo allo stato iniziale è accompagnato dall'accrescimento della forza viva d'altri corpi formanti con esso un sistema, e l'energia potenziale sensibilmente determinata dalla posizione del corpo, la sua forza viva andrà ogni volta diminuendo. Questo avviene pei corpi in movimento presso la superficie terrestre, in conseguenza dell'aria che li circonda, e in generale dei loro contatti con altri corpi: per esempio, nel caso d'una palla sospesa per un filo ad un sostegno, la quale oscilla in seguito ad un impulso iniziale; per modo che l'ipotesi della conservazione dell'energia collima col fatto sperimentale che nessun movimento d'un corpo alla portata delle nostre mani si può mantenere perpetuamente.

Basta questa riflessione a mettere in rilievo il significato del teorema in discorso, dal quale infatti la Fisica ha tratto le più importanti conseguenze.

§ 287. — La suddetta funzione W, con termine che trae origine da quello di energia potenziale, si chiama il “ potenziale del sistema di forze applicato ai punti del corpo „, ed anche semplicemente il “ potenziale del corpo (corrispondente a quel sistema di forze) „.

Per quanto precede, sono equivalenti l'esistenza del potenziale e la verificazione del teorema della conservazione dell'energia.

§ 288. — Giova in molti casi concepire il sistema delle forze applicate ai punti d'un corpo come composto di due o più sistemi parziali (§ 266), ciascun dei quali separatamente potrà ammettere un proprio potenziale o non ammetterne, in quanto che il relativo lavoro parziale soddisfa o no all' indicata condizione (§ 285).

Abbiamo, in primo luogo, la decomposizione nei due sistemi determinati dalle forze acceleratrici interne ed esterne (§ 258); che se il primo ammette potenziale, si chiama il " potenziale del corpo sopra sè stesso ".

§ 289. — Più in generale, sia il supposto sistema di forze composto di due, che distingueremo con A e B: il primo dotato di potenziale, W, e il secondo qualsivoglia. Chiamiamo altresì " energia totale relativa al sistema A " la quantità misurata da $T + W_1 - W$; e indichiamo con L la misura del lavoro parziale del sistema B corrispondente al supposto movimento del corpo fra la fine del tempo t_0 e del tempo t. Pel teorema della forza viva:

$$T - T_0 - (W - W_0) = T - W - (T_0 - W_0) = L;$$

ossia " il lavoro del sistema B eguale al corrispondente incremento dell'energia totale relativa al sistema A ".

§ 290. — La misura della potenza d'un sistema di forze applicato ai punti d'un corpo corrispondente ad un atto di movimento del corpo ad un istante, quando esiste il potenziale, risulta senz'altro il coefficiente differenziale del potenziale rispetto al tempo, pel valore che segna l'istante supposto.

Per una potenza semplicemente virtuale (§ 268) la misura, conformemente a ciò, sarà δW, dove δ ha i significati a suo luogo definiti (§§ 181, 183).

Forze acceleratrici che ammettono funzione delle forze indipendente dal tempo.

§ 291. — Immaginiamo un sistema di forze applicato ai punti d'un corpo, tale che se X, Y, Z e x, y, z indicano al so-

lito le componenti della forza acceleratrice nel punto qualunque e le coordinate di questo punto al tempo qualsivoglia t, sia

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz},$$

per modo che esista la funzione delle forze V (§ 259); e questa funzione si supponga ad un sol valore e indipendente, cioè non dipendente esplicitamente, dal tempo.

La misura del lavoro della forza acceleratrice (X, Y, Z) corrispondente al movimento dalla posizione a t_0 alla posizione a t (§ 270), sarà:

$$\int\left(\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz\right) = V - V_0, \qquad (1)$$

dinotando V e V_0 i valori della funzione delle forze nei posti del punto ai suddetti istanti: rappresentata per conseguenza dall'incremento corrispondente d'una funzione della posizione del punto mobile considerato (cfr. § 71-74).

§ 292. — In secondo luogo:

$$\int k\,d\tau \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{t_0}^{t} dt \int k \frac{dV}{dt} d\tau$$
$$= \int_{t_0}^{t} dt \frac{d}{dt} \int k\,V\,d\tau = \int k\,V\,d\tau - \left(\int k\,V\,d\tau\right)_0. \qquad (1)$$

Quindi, nell'ipotesi in discorso, il sistema delle forze applicate ai punti del corpo ammette potenziale rappresentato da:

$$\int k\,V\,d\tau,$$

sottintendendo, o intendendo inclusa in V, una costante additiva arbitraria.

§ 293. — Un caso importante è quello della forza acceleratrice costante per tutte le posizioni. Indicando con g la sua grandezza, e assumendo l'asse delle z colla sua orientazione, sarà:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = g.$$

Quindi:

$$V = gz, \qquad W = g\int k\,z\,d\tau = m\,g\,\bar{z},$$

dinotando m la grandezza della massa e z la z del centro di massa del corpo.

Così la misura del lavoro corrispondente al movimento del corpo dalla posizione ad un istante alla posizione ad un altro qualsivoglia è il prodotto della forza motrice per la componente dello spostamento del centro di massa secondo la supposta forza acceleratrice, o, se ci piace, secondo la forza motrice medesima.

§ 294. — La (1, § 291) e la (1, § 292) stanno parimente nel caso che la V sia funzione a più valori, intendendo che V_0 rappresenti uno dei suoi valori nel posto iniziale del punto e V il valore nel posto al tempo t che vi succede con continuità secondo la successione dei posti relativi agli istanti intermedii (cfr. § 75). Quindi in questo caso il lavoro della forza acceleratrice e del sistema di forze applicato ai punti del corpo dipende in generale dalla successione degli stati intermedii.

2.° **Postulato della forza elementare.**

§ 295. — L'esperienza conferma *a posteriori* il seguente postulato.

La grandezza della forza elementare relativa ad ogni condizione fisica (§ 256) è funzione simmetrica dei due punti corrispondenti, e la sua direzione quella della retta che li congiunge.

§ 296. — Il senso potrà esser quello che dal punto cui si riferisce volge verso l'altro, o l'opposto. Nel primo caso la forza elementare si dice " attrattiva „ o un' " attrazione „: nel secondo, " repulsiva „, o una " repulsione „.

§ 297. — Indichiamo, come precedentemente (§ 256), con $mm'\mathbf{X}$, $mm'\mathbf{Y}$, $mm'\mathbf{Z}$, le componenti della forza elementare considerata, e (x, y, z), (x', y', z') siano il punto cui si riferisce, e l'altro punto rispettivamente.

Secondo il precedente postulato sarà:

$$\mathbf{X} = \pm \mathbf{R}\frac{x-x'}{r}, \quad \mathbf{Y} = \pm \mathbf{R}\frac{y-y'}{r}, \quad \mathbf{Z} = \pm \mathbf{R}\frac{z-z'}{r}, \quad (1)$$

dove:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad \mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2},$$

e va preso + o — secondo che la forza è attrattiva o repulsiva.

Espressione della forza acceleratrice nei punti d'un corpo interna ed esterna.

§ 298. — Le componenti della forza acceleratrice in un punto qualunque (x, y, z) di un corpo concepito isolato con un altro, interna o esterna (§ 258), avranno per espressione:

$$\pm \int \frac{k' \mathrm{R}}{r}(x - x')\, d\tau', \quad \pm \int \frac{k' \mathrm{R}}{r}(y - y')\, d\tau', \quad \pm \int \frac{k' \mathrm{R}}{r}(z - z')\, d\tau',$$

dove, per la forza acceleratrice interna, (x', y', z') rappresenta, una volta fissato (x, y, z), il punto qualsivoglia dello stesso corpo, k' la grandezza della densità in esso punto, e τ' quella del volume: e per la forza acceleratrice esterna, i medesimi simboli hanno quel significato pel corpo esterno.

Espressione della potenza d'un sistema di forze interno applicato ai punti d'un corpo, corrispondente ad un atto di movimento.

§ 299. — Indicando, come al § 257, con X_i, Y_i, Z_i le componenti della forza acceleratrice interna nel punto qualunque (x, y, z) d'un corpo, e con k la grandezza della densità in questo punto, fissato il quale (x', y', z') e k' rappresenteranno anche il punto qualsivoglia del corpo e la corrispondente grandezza della densità, mentre quella del volume s'indicherà con τ o τ' secondo che giova considerare il corpo come insieme dei punti (x, y, z) o (x', y', z'), abbiamo:

$$\int k \left(X_i \frac{dx}{dt} + Y_i \frac{dy}{dt} + Z_i \frac{dz}{dt} \right) d\tau =$$
$$\int k\, d\tau \int \frac{k' \mathrm{R}}{r} \left((x - x') \frac{dx}{dt} + (y - y') \frac{dy}{dt} + (z - z') \frac{dz}{dt} \right) d\tau.$$

E poichè le due integrazioni si riferiscono allo stesso campo di cui così (x, y, z) come (x', y', z') rappresenta il punto qualsivoglia, e $\dfrac{k\, k' \mathrm{R}}{r}$ è simmetrica per rispetto a questi due punti,

comunque si scelgano, il secondo membro può anche scriversi:

$$\int k' d\tau' \int \frac{k\,\mathbf{R}}{r}\left\{(x'-x)\frac{dx'}{dt}+(y'-y)\frac{dy'}{dt}+(z'-z)\frac{dz'}{dt}\right\} d\tau.$$

Ne viene:

$$2\int k\left\{X_i\frac{dx}{dt}+Y_i\frac{dy}{dt}+Z_i\frac{dz}{dt}\right\}d\tau$$

$$=\iint \frac{k\,k'\,\mathbf{R}}{r}\left\{(x-x')\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)+(y-y')\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)+(z-z')\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)\right\}d\tau\,d\tau'$$

Ora, da:

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

segue:

$$r\frac{dr}{dt}=(x-x')\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)+(y-y')\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)+(z-z')\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right).$$

E introducendo questa relazione nelle precedente, ne ricaviamo l'espressione della potenza d'un sistema di forze interne applicato ai punti d'un corpo corrispondente ad un suo atto di movimento qualsivoglia al tempo t:

$$\frac{1}{2}\iint k\,k'\,\mathbf{R}\,\frac{dr}{dt}\,d\tau\,d\tau'. \qquad (1)$$

Nel caso d'una potenza virtuale, quando giovi metterlo in evidenza, ci varremo del solito simbolo δ; e con

$$r\delta r=(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+(z-z')(\delta z-\delta z')$$

abbiamo per misura di detta potenza:

$$\frac{1}{2}\iint k\,k'\,\mathbf{R}\,\delta r\,d\tau\,d\tau'. \qquad (2)$$

La potenza d'un sistema di forze interne applicato ai punti d'un corpo corrispondente ad ogni atto di movimento rigido è nullo.

§ 300. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un atto di movimento del corpo in discorso ad un istante sia rigido è

che sia, per ogni coppia di punti (x, y, z) e (x', y', z'), al supposto istante:

$$\delta r = 0 .$$

Quindi, per la precedente espressione, la potenza d'un sistema di forze applicato ai punti di un corpo corrispondente ad un atto di movimento rigido qualsivoglia è nulla.

In altri termini, è:

$$\int k\,(X_i\,\delta x + Y_i\,\delta y + Z_i\,\delta z)\,d\tau = 0, \qquad (1)$$

ogniqualvolta $(\delta x, \delta y, \delta z)$ rappresenta la velocità all'istante considerato del punto qualunque del mobile, per un atto di movimento conciliabile colla rigidità.

Risultante d'un sistema di forze qualunque applicato ai punti d'un corpo, e risultante dei momenti dello stesso sistema rispetto ad un polo.

§ 301. — Immaginiamo un sistema qualunque di forze applicato ai punti d'un corpo (§ 263), e indichino X, Y, Z le componenti della relativa forza acceleratrice nel punto qualunque, x, y, z e k le coordinate di questo punto e la densità in esso all'istante considerato.

Conformemente al § 70, il vettore le cui componenti sono:

$$\int k\,X\,d\tau, \quad \int k\,Y\,d\tau, \quad \int k\,Z\,d\tau$$

si chiama il " risultante del sistema di forze applicato ai punti del corpo ": e il vettore le cui componenti sono:

$$\int k\big((y-b)\,Z - (z-c)\,Y\big)\,d\tau,$$

$$\int k\big((z-c)\,X - (x-a)\,Z\big)\,d\tau,$$

$$\int k\big((x-a)\,Y - (y-b)\,X\big)\,d\tau,$$

il " risultante dei momenti del sistema di forze applicato ai punti del corpo rispetto al punto (a, b, c) come polo ".

La quantità del primo vettore ha per unità quella della forza motrice, rappresentata da $[l\, t^{-2}\, m]$: la quantità del secondo, l'unità parimente derivata rappresentata da $[l^2\, t^{-2}\, m]$.

§ 302. — Quando esista un punto (a, b, c) tale che il corrispondente risultante dei momenti sia nullo, per modo che la stessa proprietà apparterrà ad ogni punto della parallela alla risultante delle forze passante per lo stesso punto, il risultante dei momenti del sistema di forze considerato sarà il momento rispetto al supposto polo del vettore applicato di cui è il vettore la risultante del sistema delle forze e punto d'applicazione un punto qualunque della retta suddetta, che si chiama perciò " asse d'applicazione „ della risultante del sistema delle forze, mentre ogni suo punto si chiama " un punto d'applicazione „ (cfr. §§ 50, 70).

Ciò si verifica nel caso che le rette descritte pei singoli punti del corpo nella direzione della relativa forza acceleratrice — cioè gli assi dei vettori applicati formanti il sistema (§ 263) — concorrano in un punto; e l'asse d'applicazione è la retta passante per questo punto nella direzione della risultante del sistema di forze (§§ 52, 70).

Un altro caso è quello che le forze acceleratrici relative ai singoli punti siano fra loro parallele, e la risultante del sistema delle forze non nulla. Allora l'asse d'applicazione è la parallela alle forze acceleratrici passante pel punto le cui coordinate, indicando con R la misura della forza acceleratrice relativa al punto (x, y, z), sono:

$$\frac{\int k\, R\, x\, d\tau}{\int k\, R\, d\tau}, \quad \frac{\int k\, R\, y\, d\tau}{\int k\, R\, d\tau}, \quad \frac{\int k\, R\, z\, d\tau}{\int k\, R\, d\tau};$$

il qual punto si chiama " il punto d'applicazione „ senz'altro, o anche " il centro „ del sistema di forze parallele; e si vede che, se R è costante, cioè la forza acceleratrice eguale in ogni punto, si riduce al centro di massa (§§ 52, 70).

Espressione della potenza di un sistema di forze applicato ai punti di un corpo corrispondente ad un atto di movimento conciliabile colla rigidità.

§ 303. — Sia ai punti di un corpo applicato un sistema qualunque di forze, e rappresenti (x, y, z) il punto qualsivoglia del corpo, e (X, Y, Z) la corrispondente forza acceleratrice. L'ipotesi che il corpo sia in atto di movimento rigido si traduce in quella che le componenti della velocità di (x, y, z) siano espresse da:

$$l + qz - ry, \qquad m + qx - rz, \qquad n + py - qx$$

dove l, m, n, p, q, r sono parametri invariabili con x, y, z. Ne viene per espressione della potenza del supposto sistema di forze corrispondente a tale atto di movimento:

$$l\int k\,X\,d\tau + m\int k\,Y\,d\tau + n\int k\,Z\,d\tau +$$
$$p\int k\,(yZ - zY)\,d\tau + q\int k\,(zX - xZ)\,d\tau + r\int k\,(xY - yX)\,d\tau.$$

Il risultante d'un sistema di forze interne applicate ai punti di un corpo e il risultante dei momenti dello stesso sistema di forze per rispetto ad un polo qualsivoglia sono nulli.

§ 304. — Esprimendo in quella forma il primo membro della (1, § 300), abbiamo:

$$l\int k\,X_i\,d\tau + \ldots + p\int k\,(yZ_i - zY_i)\,d\tau + \ldots = 0. \qquad (1)$$

Ne viene, concependo a ciascuno dei sei parametri successivamente attribuito un valore diverso da 0, e il valor 0 ai rimanenti, che l'equazione medesima equivale alle sei:

$$\left.\begin{array}{c}\int k\,X_i\,d\tau = 0, \qquad \int k\,Y_i\,d\tau = 0, \qquad \int k\,Z_i\,d\tau = 0, \\ \int k\,(yZ_i - zY_i)\,d\tau = 0, \int k\,(zX_i - xZ_i)\,d\tau = 0, \int k\,(xY_i - yX_i)\,d\tau = 0.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Equazioni cardinali del movimento.

§ 305. — Immaginiamo un corpo in movimento isolato con uno o più altri, e indichiamo con (X, Y, Z), (X_i, Y_i, Z_i) e (X_e, Y_e, Z_e) la forza acceleratrice rispettivamente completa, interna ed esterna al tempo qualunque t, nel suo punto qualunque, le cui coordinate allo stesso tempo t sono x, y, z (§ 258).

Per (1, § 262) abbiamo:

$$\int k \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau = \int k X d\tau, \quad \int k\left(y \frac{d^2 z}{d t^2} - z \frac{d^2 y}{d t^2}\right) d\tau = \int k (y Z - z Y) d\tau,$$

e le analoghe.

Quindi, in conseguenza delle equazioni del precedente §, tenuto calcolo delle (2, § 257):

$$\left.\begin{aligned}
\int k \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau &= \int k X_e d\tau, \\
\int k \frac{d^2 y}{d t^2} d\tau &= \int k Y_e d\tau, \\
\int k \frac{d^2 z}{d t^2} d\tau &= \int k Z_e d\tau, \\
\int k \left(y \frac{d^2 z}{d t^2} - z \frac{d^2 y}{d t^2}\right) d\tau &= \int k (y Z_e - z Y_e) d\tau, \\
\int k \left(z \frac{d^2 x}{d t^2} - x \frac{d^2 z}{d t^2}\right) d\tau &= \int k (z X_e - x Z_e) d\tau, \\
\int k \left(x \frac{d^2 y}{d t^2} - y \frac{d^2 y}{d t^2}\right) d\tau &= \int k (x Y_e - y X_e) d\tau.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Chiameremo talvolta queste equazioni, per la loro importanza nella teoria del movimento, " equazioni cardinali ". Osserviamo che esse equivalgono all'unica:

$$\int k \left(\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X_e\right)\delta x + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y_e\right)\delta y + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z_e\right)\delta z\right) d\tau = 0, \quad (2)$$

per ogni atto di movimento del corpo al tempo t conciliabile colla rigidità: la quale non è altro che la (1, § 300), sotto diversa forma.

§ 306. — Queste relazioni forniscono per ogni tempo t il risultante del sistema delle forze esterne applicato ai punti del mobile considerato, il quale riesce la forza motrice, per modo che ne indicheremo le componenti coi simboli X, Y, Z già per ciò adoperati: e il risultante dei momenti dello stesso sistema di forze esterne rispetto all' origine delle coordinate (ch' è un punto scelto a piacere) come polo, di cui indicheremo le componenti con M_x, M_y, M_z.

Così abbiamo:

$$\int k \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau = X, \qquad \int k \frac{d^2 y}{d t^2} d\tau = Y, \qquad \int k \frac{d^2 z}{d t^2} d\tau = Z,$$

$$\int k \left(y \frac{d^2 z}{d t^2} - z \frac{d^2 y}{d t^2} \right) d\tau = M_x,$$

$$\int k \left(z \frac{d^2 x}{d t^2} - x \frac{d^2 z}{d t^2} \right) d\tau = M_y,$$

$$\int k \left(x \frac{d^2 y}{d t^2} - y \frac{d^2 t}{d t^2} \right) d\tau = M_z.$$

La prima terna di queste equazioni o delle (1, § 305) e la corrispondente delle (2, § 304) traducono i teoremi del centro di massa e del movimento del centro di massa (§§ 252, 253): la seconda terna e la corrispondente delle (2, § 304), due nuovi teoremi che passiamo ad esporre.

Risultante d'un sistema di quantità di moto applicato ai punti d' un corpo e dei momenti dello stesso sistema rispetto ad un punto.

§ 307. — Rappresentate al solito con x, y, z le coordinate del punto qualunque d' un corpo al tempo t, e con k la grandezza della densità in esso punto allo stesso istante, il vettore

$$\left(k \frac{d x}{d t}, \quad k \frac{d y}{d t}, \quad k \frac{d z}{d t} \right)$$

si chiamerà la " quantità di moto specifica „ applicata al punto

(x, y, z), corrispondente alla velocità $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ dello stesso punto. E l'insieme dei vettori applicati definiti da questi vettori e dai relativi punti del corpo, per tutti i punti del corpo medesimo, si dirà il sistema delle quantità di moto applicato ai punti del corpo all'istante supposto.

Il vettore le cui componenti sono

$$\int k \frac{dx}{dt} d\tau, \quad \int k \frac{dy}{dt} d\tau, \quad \int k \frac{dz}{dt} d\tau$$

fu già definito come quantità di moto del corpo al tempo t; e potremo anche chiamarlo, secondo le premesse definizioni, il " risultante del sistema delle quantità di moto applicato ai punti del corpo ".

Analogamente il vettore le cui componenti sono

$$\int k \left((y-b)\frac{dz}{dt} - (z-c)\frac{dy}{dt}\right) d\tau,$$
$$\int k \left((z-c)\frac{dx}{dt} - (x-a)\frac{dz}{dt}\right) d\tau,$$
$$\int k \left((x-a)\frac{dy}{dt} - (y-b)\frac{dx}{dt}\right) d\tau,$$

si chiamerà il " risultante dei momenti del sistema delle quantità di moto applicato ai punti del corpo per rispetto al punto (a, b, c) come polo ".

Di questo vettore si può dare un'altra definizione. Immaginiamo pel punto (a, b, c) un piano qualsivoglia individuato dalla sua perpendicolare, cui attribuiremo anche un senso determinato — asse del piano —: e concepita la projezione del punto (x, y, z) su questo piano per ogni valore di t, indichiamo con A la misura dell'area del triangolo curvilineo limitato dalla trajettoria della projezione medesima, dal raggio vettore descritto dal punto (a, b, c) alla projezione al tempo t, e da un raggio vettore fisso uscente dallo stesso punto (a, b, c), supposta positiva o negativa secondo che, per rispetto all'asse del piano, è positivo o negativo il giro che conduce per l'angolo minore di due retti dal secondo al primo raggio vettore. Se α, β, γ, dinotano i co-

seni di direzione dell'asse del piano, sarà, per una nota formola di geometria analitica: *

$$\left((y-b)\frac{dz}{dt}-(z-c)\frac{dy}{dt}\right)\alpha+\left((z-c)\frac{dx}{dt}-(x-a)\frac{dz}{dt}\right)\beta$$
$$+\left((x-a)\frac{dy}{dt}-(y-b)\frac{dx}{dt}\right)\gamma=\frac{dA}{dt}.$$

Per conseguenza, il vettore in discorso può definirsi colla proprietà che la sua componente secondo un asse qualunque è

$$\int k\frac{dA}{dt}\,d\tau$$

dove A ha il suddetto significato pel piano passante pel punto (a, b, c) il cui asse sia l'asse in discorso. E conformemente a ciò lo chiamiamo pure " quantità di moto areale del corpo rispetto al polo (a, b, c) „ al tempo t.

Quantità di moto areale in un atto di movimento rotatorio rispetto ad un punto dell'asse.

§ 308. — Supposto il mobile al tempo t in atto di movimento rotatorio, scelgasi un punto qualunque dell'asse istantaneo di rotazione, e indichino $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ le componenti della velocità angolare, e $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ le coordinate del punto qualunque del mobile secondo la terna degli assi principali d'inerzia del mobile in quel punto. Le componenti della velocità di detto punto secondo i medesimi assi saranno:

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{z}-\mathfrak{r}\,\mathfrak{y},\qquad \mathfrak{r}\,\mathfrak{x}-\mathfrak{p}\,\mathfrak{z},\qquad \mathfrak{p}\,\mathfrak{y}-\mathfrak{q}\,\mathfrak{x}.$$

Quindi la componente secondo il primo asse della quantità di moto areale rispetto al punto considerato come polo

$$\int k\left\{\mathfrak{y}(\mathfrak{p}\,\mathfrak{y}-\mathfrak{q}\,\mathfrak{z})-\mathfrak{z}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{x}-\mathfrak{p}\,\mathfrak{z})\right\}d\tau=\mathfrak{p}\int k(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)\,d\tau;$$

---

* Si osservi che il primo membro è la componente secondo l'asse (α, β, γ) del momento della velocità del punto (x, y, z) rispetto al punto (a, b, c) come polo (§ 197), e si confrontino i §§ 43, 140.

e indicando con P, Q, R i momenti principali d'inerzia relativi al punto, corrispondenti ordinatamente ai tre assi, si conclude che le componenti della quantità di moto areale in discorso saranno:

$$P\mathfrak{p}, \qquad Q\mathfrak{q}, \qquad R\mathfrak{r}, \tag{1}$$

per modo che il quadrato della grandezza sarà:

$$P^2\mathfrak{p}^2 + Q^2\mathfrak{q}^2 + R^2\mathfrak{r}^2.$$

Faremo uso di queste formole a suo luogo. Intanto notiamo come ne emerga che la quantità di moto areale d'un atto di movimento rotatorio rispetto ad un punto dell'asse non potrà esser nulla, se non è nulla la velocità angolare, cioè l'atto di movimento medesimo.

Ora, indichino $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) i coseni di direzione rispetto ad una terna d'assi fissi dei precedenti assi principali d'inerzia. Le componenti della quantità di moto areale suddetta secondo questi assi risultano:

$$\left.\begin{array}{l} P\mathfrak{p}\,\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\,\alpha_2 + R\mathfrak{r}\,\alpha_3 \\ P\mathfrak{p}\,\beta_1 + Q\mathfrak{q}\,\beta_2 + R\mathfrak{r}\,\beta_3 \\ P\mathfrak{p}\,\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\,\gamma_2 + R\mathfrak{r}\,\gamma_3. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Quantità di moto areale nel movimento relativo.

§ 309. — Consideriamo il movimento relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio. Supposta l'orientazione degli assi fissi quella degli assi mobili, avremo col solito significato dei simboli, e con $\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta$ indicando le coordinate del centro di massa rispetto agli assi mobili:

$$x = \alpha + \xi, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\xi}{dt},$$

e le analoghe; donde:

$$\int k\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)d\tau = m\left(\bar y\frac{d\gamma}{dt} - \bar z\frac{d\beta}{dt}\right) + m\left(\beta\frac{d\bar\zeta}{dt} - \gamma\frac{d\bar\eta}{dt}\right) + \int k\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right)d\tau. \tag{1}$$

Quindi, nell'ipotesi che il centro di massa serbi posizione invariata rispetto agli assi mobili:

$$\int k\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)d\tau = m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\int k\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)d\tau, \quad (2)$$

e le due analoghe.

Sono queste relazioni importanti fra le quantità di moto areali del movimento assoluto rispetto ad un punto fisso e del movimento relativo rispetto ad un punto invariabilmente unito agli assi mobili; che se agli assi mobili è invariabilmente unito il centro di massa, si vede che la seconda quantità di moto areale è indipendente dal polo.

Teorema delle aree.

§ 310. — La seconda terna delle equazioni (1, § 305) può porsi sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int k\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)d\tau &= M_x,\\
\frac{d}{dt}\int k\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)d\tau &= M_y,\\
\frac{d}{dt}\int k\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)d\tau &= M_z;
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

per modo che il coefficiente differenziale rispetto al tempo della componente secondo un asse qualsivoglia della quantità di moto areale d'un corpo è, ad ogni istante, cioè nello stato che compete al corpo ad ogni istante, esclusivamente determinato dai corpi coi quali il corpo considerato si concepisce isolato (cfr. §§ 252, 261).

Questa proposizione costituisce il “ teorema delle aree ”.

Teorema delle aree nel movimento relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio a cui il centro di massa è invariabilmente unito.

§ 311. — Da (2, § 309) segue immediatamente, differenziando rispetto a t:

$$\int k\left(y\frac{d^2 z}{dt^2}-z\frac{d^2 y}{dt^2}\right)d\tau=m\left(\bar{y}\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}-\bar{z}\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right)+\int k\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)d\tau.$$

D'altra parte:

$$\int k\,(y\,Z_e-zY_e)\,d\tau=m\left(\bar{y}\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}-\bar{z}\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right)+\int k\left(\eta\left(Z_e-\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}\right)-\zeta\left(Y_e-\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right)\right)d\tau,$$

come subito si trova, mediante il § 261, e tenendo calcolo che

$$\alpha=\bar{x}-\bar{\xi}=\bar{x}-\frac{1}{m}\int k\,\xi\,d\tau$$

Poniamo:

$$\left.\begin{aligned}\int k\left(\eta\left(Z_e-\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}\right)-\zeta\left(Y_e-\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right)\right)d\tau&=M_\xi\\ \int k\left(\zeta\left(X_e-\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\right)-\xi\left(Z_e-\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}\right)\right)d\tau&=M_\eta\\ \int k\left(\xi\left(Y_e-\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right)-\eta\left(X_e-\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\right)\right)d\tau&=M_\zeta.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Per le due precedenti relazioni e la seconda terna delle (1, § 305) abbiamo immediatamente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int k\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)d\tau&=M_\xi\\ \frac{d}{dt}\int k\left(\zeta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\zeta}{dt}\right)d\tau&=M_\eta\\ \frac{d}{dt}\int k\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)d\tau&=M_\zeta.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Ora, essendo pel § 309 e (1, § 262):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X_e - \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + X_i,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y_e - \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + Y_i,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z_e - \frac{d^2\bar{z}}{dt^2} + Z_i,$$

e $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ puramente dipendenti dalle forze esterne, diremo, secondo il § 258, il vettore le cui componenti sono

$$X_e - \frac{d^2\bar{z}}{dt^2}, \qquad Y_e - \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}, \qquad Z_e - \frac{d^2\bar{z}}{dt^2}$$

la " forza acceleratrice esterna corrispondente al movimento relativo ", e il vettore le cui componenti sono X_i, Y_i, Z_i, cioè la forza acceleratrice interna del movimento assoluto, anche forza acceleratrice interna del movimento relativo in discorso.

Ciò posto, (M_ξ, M_η, M_ζ) sarà il risultante dei momenti del sistema delle forze esterne applicato ai punti del corpo corrispondente al movimento relativo per rispetto al punto assunto come origine degli assi mobili; e le equazioni (2), che hanno la stessa forma delle (1) del § precedente, traducono il teorema delle aree pel movimento relativo considerato.

Giova notare, in primo luogo, che essendo

$$\int k\,\frac{d^2\xi}{dt^2}\,d\tau = m\,\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \text{ecc.}$$

la forza motrice corrispondente allo stesso movimento è nulla; e in secondo luogo che si ha:

$$\int k\left(\eta\left(Z_e - \frac{d^2\bar{z}}{dt^2}\right) - \zeta\left(Y_e - \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right)\right)d\tau = \int k\left((\eta - \bar{\eta})\,Z_e - (\zeta - \bar{\zeta})\,Y_e\right)d\tau$$

e le analoghe; per modo che (M_ξ, M_η, M_ζ) è, se si vuole, il risultante dei momenti del sistema delle forze esterne applicato ai punti del corpo *corrispondente al movimento assoluto*, per rispetto al centro di massa del corpo.

Questo risultante sarà quindi nullo quando le forze acceleratrici nei singoli punti del mobile siano eguali, o le parallele alle forze acceleratrici nei singoli punti descritte pei punti corrispondenti concorrano nel centro di massa (§ 302).

Teorema della conservazione delle aree.

§ 312. — Supponiamo, in tutto l'intervallo di tempo considerato, nullo il risultante dei momenti del sistema delle forze applicato ai punti del corpo rispetto ad un polo. Assunto il polo per origine delle coordinate, abbiamo, per quanto precede:

$$\frac{d}{dt}\int k\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)d\tau = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\int k\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)d\tau = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\int k\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)d\tau = 0,$$

ad ogni valore di t. Quindi, indicando con a, b, c tre costanti:

$$\int k\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)d\tau = a,$$
$$\int k\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)d\tau = b,$$
$$\int k\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)d\tau = c,$$

ossia, coi simboli del § 307:

$$\int k\frac{d\mathrm{A}}{dt}\,d\tau = A,$$

ove A dinota una nuova costante; che si può anche porre sotto la forma:

$$\int k\,\mathrm{A}\,d\tau = A' + At,$$

con A' rappresentando pure una costante. *

* Questa forma dell'equazione sta egualmente in un intervallo qualunque, pur d'intendere che $\frac{1}{2}\mathrm{A}$ rappresenti, in ogni caso, la misura dell'area del triangolo curvilineo *generato* dal raggio vettore, spiccato dal polo, della proiezione del punto (x, y, z) sul supposto piano, partendo da una certa posizione; il quale si concepisce costituito da una successione di triangoli curvilinei definiti come al § 307, d'area, se capita, alternativamente d'opposto segno.

In altri termini, nelle suddette ipotesi, il risultante dei momenti del sistema delle quantità di moto applicato ai punti del corpo rispetto al supposto polo, ossia la quantità di moto areale del corpo rispetto a questo polo, è costante per tutta la durata del movimento.

In ciò consiste il " teorema della conservazione delle aree ".

§ 313. – Uno dei casi più importanti in cui si verifica il teorema della conservazione delle aree è quello che il movimento sia esclusivamente determinato dalle forze interne; e allora il teorema regge qualunque sia il punto preso per polo.

In ogni altro caso in cui, come in quello, è nullo il risultante del sistema delle forze applicato ai punti del corpo, il teorema, se regge per un punto assunto come polo, reggerà per ogni altro.

Diversamente l'ipotesi equivale a quella che, nel considerato intervallo di tempo, il risultante del sistema delle forze esterne applicato ai punti del corpo ammetta un asse d'applicazione (§ 50), ogni punto del quale può fungere indistintamente da polo.

§ 314. – Osserviamo che le stesse proposizioni stanno pel movimento relativo ad una terna d'assi mobili in movimento traslatorio, per rispetto alla quale il centro di massa serba posizione invariabile, intendendo che tutti gli elementi ricordati siano quelli del movimento relativo medesimo, e che il polo sia invariabilmente unito agli assi mobili (§ 311). E poichè la forza motrice corrispondente al movimento relativo è nulla (§ 311), il teorema regge per tutti i poli se si verifica per uno.

§ 315. – Anche dal teorema delle aree e della conservazione delle aree si possono ricavare conseguenze che collimano con noti fatti sperimentali, così da potersi invocare come spiegazione dei fatti medesimi. Per questi teoremi, in un corpo i cui punti ad un istante abbiano tutti velocità nulla, come quando si supponga originariamente immobile, non potrà nascere per effetto delle forze interne, senza il concorso di forze esterne, un movimento rotatorio, o polare: nè, più in generale, alcun movimento pel quale abbia valore diverso da zero la quantità di moto areale per rispetto ad un punto; e se ad un istante tutti i suoi punti hanno egual velocità, non potrà assumere un movimento cui corrisponda per rispetto ad una terna d'assi alla

quale il centro di massa sia invariabilmente fisso un movimento relativo rotatorio, o polare, o più generalmente tale che riesca diversa da zero ad un istante la quantità di moto areale rispetto ad un punto invariabilmente unito alla terna medesima. D'altra parte, ove un mobile possieda un movimento così fatto, non potrà, senza l'intervento di agenti esterni, ridursi in quiete, o assumere qualsiasi altro movimento pel quale la suddetta quantità di moto areale ad un istante sia nulla.

Abbiamo veduto che condizione necessaria e sufficiente perchè un atto di movimento rotatorio sia nullo è che sia nulla la quantità di moto areale rispetto ad un punto qualunque dell'asse (§ 308). D'altronde ogni movimento rigido è tale che, se s'immagina una terna d'assi in movimento traslatorio cui il centro di massa sia invariabilmente unito, l'atto di movimento ad ogni istante del corrispondente movimento relativo a questa terna è rotatorio, coll'asse passante pel centro di massa (cfr. §§ 124, 132). Quindi, nella doppia ipotesi che il movimento non possa essere che rigido e sia esclusivamente determinato dalle forze interne del corpo, se ad un istante il suddetto atto di movimento relativo è nullo, lo sarà costantemente: cioè il movimento sarà traslatorio. Che se ad un istante sarà nulla la velocità del centro di massa, o il relativo atto di movimento, come quando il corpo sia originariamente in quiete, questo movimento traslatorio avrà costantemente velocità nulla (§ 253): per modo che il corpo si manterrà in quiete.

In conclusione, non può nascere dalla quiete, o terminare con essa, un movimento rigido puramente determinato dalle forze interne del mobile. Perciò, se un corpo è sensibilmente rigido, come una pietra, una sbarra metallica, sarà necessario l'intervento d'un agente esterno perchè vi si susciti dal riposo un movimento apprezzabile qualsivoglia, e supposto che sia in movimento, per ridurlo in quiete. E neppure potrà crearsi o estinguersi il componente polare rispetto al centro di massa di quel movimento, o il complementare componente traslatorio (§§ 124, 132); donde scaturiscono egualmente ovvie applicazioni.

Le azioni muscolari, riducendosi a forze interne, non potranno, senza il concorso di agenti esterni, modificare la quan-

tità di moto areale dell'animale che le esercita, sia pel movimento assoluto rispetto ad un punto fisso, sia pel movimento relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio cui il centro di massa è invariabilmente unito, rispetto ad un punto fisso a questa terna; donde segue, in particolare, quando non intervenga un'azione esterna, la necessaria connessione di giri delle diverse parti in verso opposto, e l'esclusione della possibilità di produrre dal riposo un movimento rotatorio, o distruggerlo — non altrimenti che un traslatorio (§ 254) — o trasformare l'un nell'altro un movimento traslatorio e rotatorio, così assoluto come relativo alla suddetta terna d'assi mobili col centro di massa.

Altra conseguenza: se un corpo gira intorno ad un asse fisso così che il raggio condotto perpendicolarmente da questo asse ad un punto qualunque descriva alla fine d'un tempo qualsivoglia un angolo di misura φ eguale per tutti i punti, e si contrae per modo che diminuisca per ogni punto la grandezza di quel raggio, nell'ipotesi che il movimento sia puramente determinato dalle forze interne, dovrà crescere a misura $\frac{d\varphi}{dt}$: circostanza che serve di fondamento alla teoria cosmogonica di *Laplace*.

Immaginato il sistema formato da tutti i corpi dell'universo, il suo centro di massa, se non è immobile, avrà movimento uniforme rettilineo, cioè velocità costante, ciò che forma un vettore invariabile dell'universo (§ 254). Un altro vettore invariabile è la quantità di moto areale del medesimo sistema nel suo movimento assoluto rispetto ad un punto qualsivoglia fisso, o nel suo movimento relativo ad una terna d'assi cui il centro di massa è invariabilmente unito rispetto ad un punto qualsivoglia fisso a questa terna. E lo stesso vale pel sistema solare, se si prescinde dall'influenza delle stelle.

§ 316. — Con termine introdotto da *Laplace*, quando si verifica il teorema della conservazione delle aree, il piano passante pel supposto polo della quantità di moto areale perpendicolare all'asse della quantità di moto areale medesima si chiama il corrispondente “ piano invariabile ”.

Forze centrali.

§ 317. — La forza elementare si dice “ centrale ” quando, oltre essere la sua direzione quella della congiungente i centri di massa dei due corpi, conformemente al 2° postulato (§ 295), la sua grandezza è funzione della loro mutua distanza, e non dipende esplicitamente dal tempo.

§ 318. — Richiamiamo i simboli del § 297, e poniamo: *

$$\mathbf{R} = \mp \frac{d\mathbf{V}}{dr},$$

ove va preso — o + secondo che la forza elementare è attrattiva o repulsiva. Poichè si ha:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dr}\,\frac{x-x'}{r} = \frac{d\mathbf{V}}{dr}\,\frac{dr}{dx} = \frac{d\mathbf{V}}{dx}$$

e le due analoghe, le (1, § 297) ci dànno:

$$\mathbf{X} = \frac{d\mathbf{V}}{dx}, \qquad \mathbf{Y} = \frac{d\mathbf{V}}{dy}, \qquad \mathbf{Z} = \frac{d\mathbf{V}}{dz}.$$

Perciò chiameremo **V** la “ funzione delle forze della forza elementare ”, o “ funzione delle forze elementari ”. E salvo affermare il contrario, **V** si supporrà funzione delle coordinate dei due relativi punti x, y, z, x', y', z', nei campi ove occorre considerarli, continua e finita.

§ 319. — Ciò posto, secondo il § 260, rappresentando con (X, Y, Z) la forza acceleratrice corrispondente alla forza elementare in discorso determinata nel punto (x, y, z), d'un corpo da uno di cui k' e τ' indicano la grandezza della densità nel punto qualunque e del volume, abbiamo:

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz},$$

$$V = \int k' \mathbf{V}\, d\tau'. \tag{1}$$

* S'intende che **V**, per quanto è definita da questa equazione, include una costante additiva arbitraria, la quale si potrà concepire opportunamente determinata. Che se la rappresentiamo con C, ne consegue una costante additiva in V e W (§§ 319, 320) rappresentata rispettivamente da $m\,C$ e $m^2\,C$.

Cioè la forza acceleratrice (X, Y, Z) ammetterà la funzione delle forze, che sarà V, funzione delle x, y, z e generalmente del tempo t.

§ 320. — Supponiamo che i due corpi suddetti rappresentino ad ogni istante lo stesso corpo; così che (X, Y, Z) sia la forza acceleratrice interna nel punto qualunque di esso al tempo qualsivoglia t.

La potenza del relativo sistema di forze applicato ai punti del corpo, corrispondente ad un atto di movimento qualunque del corpo al tempo t sarà rappresentata, per (1, § 299), da

$$\frac{dW}{dt},$$

dove:

$$W = \frac{1}{2}\iint k k' \mathbf{V}\, d\tau\, d\tau'.$$

Quindi il sistema di forze in discorso ammette il potenziale W, definito dalla precedente relazione, o, conformemente a (1, § 319), da

$$W = \frac{1}{2}\int k V\, d\tau.$$

Osservazione. Notiamo che una potenza virtuale, quando occorre distinguerla, sarà analogamente rappresentata da δW.

§ 321. — La forza elementare centrale si segnala per la sua semplicità. Una celebre teoria fisica attribuisce una forza elementare centrale ad ogni specie di movimento dei corpi naturali, per modo che si verifichi il teorema della conservazione dell'energia nel movimento del sistema costituito da tutti i corpi dell' universo, e d'ogni insieme di corpi naturali che si concepisca sensibilmente isolato. Ciò che collima coll' esperienza, se si computano come energia il calore ed altre quantità appartenenti al dominio della Fisica, la cui produzione e scomparsa suol accompagnare la scomparsa e la produzione dell' energia com'è definita dalla Meccanica, in un rapporto che all'esperienza risulta completamente determinato.

Equilibrio.

§ 322. — " In equilibrio „, in un intervallo di tempo, si dice un corpo, o un sistema di corpi, quando, nell' intervallo medesimo, la posizione d'ogni suo punto si mantiene invariata.

Ciò val quanto dire che, nel supposto intervallo, la velocità d'ogni punto è costantemente nulla; donde segue pel § 242 che sarà costante in ogni punto la densità, e immediatamente che sarà pure costantemente nulla l'accelerazione.

§ 323. — Per quest'ultima circostanza le (1, § 305) si traducono senz'altro nelle

$$\int k\, X_e\, d\tau = 0, \quad \int k\, Y_e\, d\tau = 0, \quad \int k\, Z_e\, d\tau = 0,$$

$$\int k\, (y\, Z_e - z\, Y_e)\, d\tau = 0,$$

$$\int k\, (z\, X_e - x\, Z_e)\, d\tau = 0,$$

$$\int k\, (x\, Y_e - y\, X_e)\, d\tau = 0,$$

o con altra scrittura (§ 306) nelle

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = 0, \quad \mathrm{M}_x = 0, \quad \mathrm{M}_y = 0, \quad \mathrm{M}_z = 0;$$

e queste relazioni esprimono che " condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo in un intervallo di tempo è che siano nulli nell' intervallo medesimo la forza motrice o risultante del sistema delle forze esterne applicato ai punti del corpo, e il risultante dei momenti dello stesso sistema delle forze interne rispetto ad un punto qualunque „. Notiamo che, soddisfatta la condizione che sia nulla la forza motrice, basterà che sia nullo il risultante dei momenti rispetto ad un punto, perchè lo sia anche rispetto a qualsiasi altro.

Chiameremo queste relazioni le " equazioni cardinali dell'equilibrio „. Esse equivalgono all'unica (cfr. § 305):

$$\int k\, (X_e\, \delta x + Y_e\, \delta y + Z_e\, \delta z)\, d\tau = 0,$$

ove (δx, δy, δz) rappresenta la velocità del punto qualunque del corpo di cui all' istante considerato x, y, z sono le coordinate per un atto di movimento qualsivoglia del corpo allo stesso istante conciliabile colla rigidità: dalla quale si deducono, applicandola successivamente a tre atti di movimento traslatorio colla velocità parallela ai tre assi delle x, delle y e delle z, e a tre atti di movimento rotatorio aventi gli stessi assi per asse istantaneo di rotazione.

Ove il sistema delle forze esterne applicato ai punti del corpo ammetta il potenziale W, quest' equazione si riduce alla sua volta a

$$\delta W = 0,$$

col vincolo della rigidità del corpo: la quale è condizione necessaria perchè, collo stesso vincolo della rigidità, il valore del potenziale col supposto stato del corpo sia massimo o minimo.

§ 324. — Ogni posizione d'un mobile in cui esso può mantenersi in equilibrio nell'ipotesi di un sistema di forze di determinata specie applicato ai suoi punti si chiama, per rispetto a questa specie di forze, una " posizione d'equilibrio ".

Ora giova fare una distinzione importante. " Stabile " si dice una posizione d'equilibrio quando, concepito che il mobile vi si trovi ad un istante con una certa forza viva, non se ne scosterà, nel corso d'ogni possibile movimento, fuori di dati limiti, pur di supporre detta forza viva inferiore a un termine opportuno.

Praticamente è impossibile sottrarre in modo assoluto un corpo alle cause che vi determinano una forza viva, ma solo impedire che questa non oltrepassi una certa misura; per modo che, soltanto in tal caso, il mobile manterrà sensibilmente la supposta posizione.

§ 325. — I criterii della stabilità dell'equilibrio richiedono uno studio diverso a seconda del caso. Nell' ipotesi che esista il potenziale è facile riconoscere che una posizione per la quale esso riceve un valor massimo sarà posizione d'equilibrio stabile (regola di *Dirichlet*).

Difatti, indichi W_0 questo valore, e si concepisca ad un istante il sistema in tal posizione con forza viva di grandezza T_0. Indichino parimente W e T il valore del potenziale e della grandezza della forza viva nella posizione assunta dal sistema ad un istante qualunque con un movimento qualsivoglia possibile nelle supposte condizioni. Sarà:

$$W - T = W_0 - T_0,$$

donde:

$$W_0 - W + T = T_0,$$

e poichè $T > 0$:

$$W_0 - W < T_0.$$

Ora, se W_0 è un massimo di W, sarà, almeno per tutte le posizioni che non si scostano fuori di certi termini da quella cui corrisponde W_0, $W_0 - W > 0$. Quindi in questo caso la precedente relazione diventa:

$$| W_0 - W | < T_0 .$$

Ne viene che, se è $T_0 = 0$, cioè nella supposta posizione la velocità d'ogni punto del corpo è nulla, sarà ad ogni istante:

$$W = W_0$$

e il corpo manterrà la posizione medesima. E in generale, supposto $T_0 < \varepsilon$, sarà:

$$| W_0 - W | < \varepsilon :$$

per modo che il corpo non si scosterà dalla posizione in discorso tanto che $| W_0 - W |$ raggiunga il valor ε, per piccolo che si supponga.

Movimento ed equilibrio relativo.

§ 326. — Dai precedenti risultati si deducono immediatamente i corrispondenti che si riferiscono al movimento relativo ad una terna d'assi mobili comunque, considerati come fissi in una posizione, sostituendo alla forza acceleratrice del movimento

assoluto in ogni punto e ad ogni istante la risultante della forza acceleratrice medesima, dell'eguale ed opposta all'accelerazione del moto di strascinamento del punto all'istante considerato, e dell'accelerazione centrifuga composta (§ 429).

Si dice poi che un corpo, in un intervallo di tempo, è " in equilibrio relativo ad una terna d'assi mobili considerati come fissi in una posizione „, quando ogni suo punto, in tutto il supposto intervallo, serba posizione invariata rispetto agli assi mobili medesimi: donde scaturisce che la velocità e l'accelerazione del movimento relativo alla terna sarà costantemente nulla. Sarà quindi nulla l'accelerazione centrifuga composta; e per conseguenza basta sostituire, per passar dal caso dell'equilibrio assoluto a quello dell'equilibrio relativo, alla forza acceleratrice effettiva la risultante di essa e dell'eguale ed opposta all'accelerazione del moto di strascinamento.

§ 327. — Questo vettore, nell'ipotesi che uno degli assi della terna mobile sia fisso e il movimento degli altri due sia rotatorio uniforme intorno ad esso come asse di rotazione, diventa l'accelerazione centrifuga del punto nel posto che gli compete all'istante considerato (§ 203).

Assunto l'asse fisso per asse delle $\mathfrak{z}$, le componenti di detta accelerazione centrifuga secondo tre assi aventi l'orientazione degli assi mobili al supposto istante sono

$$\omega^2 \mathfrak{x}, \qquad \omega^2 \mathfrak{y}, \qquad 0,$$

con ω indicando la misura della velocità angolare.

Quindi l'insieme delle accelerazioni centrifughe dei punti d'un corpo, concepite come forze acceleratrici, ammette la funzione delle forze (§ 259):

$$\frac{1}{2} \omega^2 (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2),$$

ossia, indicando con ρ la distanza del punto dall'asse di rotazione all'istante considerato:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \rho^2,$$

che non dipende esplicitamente dal tempo.

Ne segue, nel modo a suo luogo esposto (§ 292), col solito significato dei simboli, il potenziale

$$\frac{1}{2}\omega^2 \int k \rho^2 \, d\tau,$$

che si dice il " potenziale delle forze centrifughe „ e altro non è che la misura della forza viva del moto di strascinamento all'istante considerato.

Quindi, pel § 325, se il sistema delle forze effettive ammette il potenziale, una posizione per cui riceva valor massimo la somma di questo potenziale e di quello delle forze centrifughe sarà d'equilibrio stabile relativo agli assi in discorso.

Punto materiale.

§ 328. — Per brevità di linguaggio, quando una proprietà appartiene ad un punto variabile col tempo collegato con una massa invariabile, l'enuncieremo talvolta come appartenente ad un così detto " punto materiale „: ente ideale, puramente definito da quei due elementi, che si chiamano appunto il posto ad ogni istante e la massa del punto materiale.

Con questa convenzione la forza elementare corrispondente ad una certa condizione fisica (§ 256) si chiamerà, quando ci piaccia, la forza motrice di un punto materiale isolato con un altro, in quella condizione fisica: intendendo che i posti dei due punti siano quelli dei centri di massa dei due corpi cui la legge elementare si riferisce — debitamente distinto quello a cui la forza motrice appartiene — e le masse, quelle dei due corpi medesimi.

Analogamente, se (X, Y, Z) è la forza acceleratrice in un punto d'un corpo C isolato in presenza di un corpo C' (§ 258), e m la grandezza d'una massa qualsivoglia, il vettore (mX, mY, mZ) si chiamerà talvolta la forza motrice d'un punto materiale avente il posto del suddetto punto del corpo C, e massa di grandezza m, concepito isolato col corpo C'. Così, la forza acceleratrice si dirà anche questa forza motrice nell'ipotesi che la grandezza della massa del punto materiale sia l'unità.

§ 329. — Rappresentando in ogni caso con X, Y, Z le componenti della forza motrice d'un punto materiale di cui x, y, z sono le coordinate al tempo t e m la grandezza della massa, il movimento del punto (x, y, z) conforme alle equazioni:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \qquad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \qquad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

si dice quello del punto materiale, per effetto della forza motrice (X, Y, Z).

Con tale linguaggio si enuncia, per esempio, il teorema del centro di massa (§ 252) dicendo che il movimento del centro di massa d'un corpo è quello d'un punto materiale avente il posto del centro di massa medesimo, e così la massa come la forza motrice del corpo: cioè forza motrice eguale alla risultante del sistema delle forze esterne applicato ai punti del corpo.

Osserviamo che il movimento del centro di massa d'un corpo concepito isolato con un altro avrà per limite quello d'un punto materiale avente lo stesso posto, la massa del corpo, e forza motrice eguale alla forza elementare, collo svanire del raggio d'una sfera capace di contenere ciascuno dei due corpi, o del rapporto del raggio medesimo alla minima distanza dei centri di massa — questo, s'intende, nel caso che alla distanza dei centri di massa sia prescritto un valor minimo superiore a zero — così da potersi assumere sensibilmente un movimento per l'altro quando le dimensioni dei due corpi siano inferiori ad un certo termine, o superiore ad un certo termine la minima distanza dei loro centri di massa.

Analogamente, quel movimento ha per limite il movimento dello stesso punto materiale per effetto della forza motrice (mX, mY, mZ), ove (X, Y, Z) rappresenta la forza acceleratrice nel centro di massa in discorso, collo svanire del raggio d'una sfera capace di contenere il corpo, o, nel debito caso, del rapporto di questo raggio alla minima distanza del centro di massa da un punto qualsivoglia degli altri corpi coi quali il corpo considerato si concepisce isolato.

CAPITOLO III.

GRAVITÀ.

Leggi di Kepler.

§ 330. — *Kepler* dedusse dalle osservazioni astronomiche le seguenti leggi, dove i corpi celesti sono assimilati a punti, giudicandosi entro i limiti degli errori d'osservazione le differenze provenienti dal riferirsi ad un punto piuttosto che ad un altro.

1.° L'area descritta dal raggio vettore condotto dal sole ad un pianeta è proporzionale al tempo impiegato a descriverla.

2.° Ogni pianeta descrive un ellisse di cui il sole occupa un foco.

3.° I quadrati dei tempi impiegati dai vari pianeti a descrivere le relative ellissi sono proporzionali ai cubi dei loro grandi assi.

Forza elementare di gravitazione universale — Legge di Newton.

§ 331. — Consideriamo un pianeta, e prendiamo il piano della sua orbita per piano xy, il sole per origine delle coordinate.

Indicando con x, y le coordinate del pianeta al tempo t, la 1ª legge è espressa da

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = A, \tag{1}$$

dove A rappresenta una costante.

Di qui:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

cioè:

$$\frac{\dfrac{d^2 x}{dt^2}}{x} = \frac{\dfrac{d^2 y}{dt^2}}{y}.$$

Quindi: " l'accelerazione d'ogni pianeta ha costantemente la direzione della retta congiungente il pianeta col sole. „

Poniamo conformemente a ciò:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \pm R \frac{x}{r}, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = \pm R \frac{y}{r}, \tag{2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

dove R si suppone positivo per modo da rappresentare la grandezza assoluta dell'accelerazione.

Ne viene:

$$\frac{d \mathrm{v}^2}{d t} = \pm 2 R \frac{d r}{d t}, \tag{3}$$

$$\mathrm{v}^2 = \left(\frac{d x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d t}\right)^2.$$

D'altra parte, quadrando (1) e

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt},$$

e sommando le due equazioni così ottenute, membro a membro, si ha:

$$r^2 \mathrm{v}^2 = r^2 \left(\frac{d r}{d t}\right)^2 + A^2; \tag{4}$$

e di qui, per (3):

$$R = \pm \left(\frac{d^2 r}{d t^2} - \frac{A^2}{r^3}\right). \tag{5}$$

Ora, per la 2ª legge, dirigendo l'asse della x secondo l'asse maggiore dell'orbita, dalla parte del vertice più prossimo al sole, e indicando con a ed e la grandezza del semiasse maggiore e l'eccentricità:

$$r = a(1 - e^2) - e x.$$

Quindi:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - e \frac{d^2 x}{d t^2} = \mp e R \frac{x}{r} = \mp R \left(1 - \frac{a(1 - e^2)}{r}\right);$$

e per (5);

$$R = \mp \frac{A^2}{a(1 - e^2)} \frac{1}{r^2}.$$

Poichè $1 - e^2 > 0$ e $R > 0$, occorre prendere il segno inferiore; cioè nelle (2) il segno —.

Quindi: " l'accelerazione d'ogni pianeta è costantemente volta verso il sole: e nelle varie posizioni del pianeta, inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal sole. „

Si ha poi, indicando con T il tempo impiegato dal pianeta considerato a descrivere la propria orbita:

$$A\,T = 2\,\pi\,a^2\sqrt{1 - e^2}.$$

Quindi:

$$R = 4\,\pi^2\,\frac{a^3}{T^2}\,\frac{1}{r^2}.$$

E poichè, per la 3ª legge, $\frac{a^3}{T^2}$ ha lo stesso valore per tutti i diversi pianeti, in conclusione: " l'accelerazione dei pianeti è costantemente volta verso il sole, e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza dal sole. „

Devesi questa deduzione a *Newton*,* il quale fondò sopra di essa la celebre legge portante il suo nome, che noi enuncieremo in questi termini: " Un punto materiale isolato con un altro possiede una forza motrice volta verso l'altro punto, di grandezza proporzionale al prodotto delle grandezze delle masse dei due punti, e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. „ **

Noi intenderemo che sia così definita la forza elementare relativa al movimento di due o più corpi *a distanza sensibile*, vale a dire tale che l'esperienza li rileva disgiunti, e in quella condizione fisica che sembra propria dei corpi, senza bisogno di particolari operazioni per provocarla, che chiamiamo lo *stato naturale* (§ 232). In tale ipotesi avviene come se due corpi tendessero l'uno verso l'altro, o si attirassero mutuamente secondo la legge suddetta: e questa proprietà si chiama la " gravitazione universale „, o anche " attrazione universale „.

Insistiamo sulla circostanza della distanza sensibile. L'espe-

---

* *Principia*, — Col. Allobr., 1760, Lib. III, Prop. 2.ª

** *Ibid.*, Prop. 7.ª

rienza non conferma le conseguenze dell'ipotesi che la legge in discorso si estenda alle forze interne, donde si deduce che per distanze inferiori ad un certo limite cessa di valere. *

§ 332. — Per la precedente definizione, la forza elementare di gravitazione universale è un'attrazione (§ 296), centrale (§ 317), la cui grandezza, indicando con m, m' e r le grandezze delle masse e della mutua distanza dei punti a cui si riferisce, è rappresentata da

$$\varkappa^2 \frac{m m'}{r^2},$$

ove $\varkappa^2$ dinota una costante positiva.

Quindi, se x, y, z e x', y', z' designano le coordinate ordinarie dei due punti, le sue componenti pel primo punto saranno:

$$\varkappa^2 \frac{m m'}{r^2} \frac{x' - x}{r}, \qquad \varkappa^2 \frac{m m'}{r^2} \frac{y' - y}{r}, \qquad \varkappa^2 \frac{m m'}{r^2} \frac{z' - z}{r},$$

o in altra forma:

$$m m' \frac{d \frac{\varkappa^2}{r}}{dx}, \qquad m m' \frac{d \frac{\varkappa^2}{r}}{dy}, \qquad m m' \frac{d \frac{\varkappa^2}{r}}{dz}$$

per modo che

$$\frac{\varkappa^2}{r}$$

è nel caso in discorso, la funzione delle forze elementare (cfr. § 318).

---

* Secondo la definizione data a suo luogo (§ 256), la forza elementare relativa ad una condizione fisica si deve concepire dedotta dal movimento di due corpi isolati, l'uno coll'altro, nella condizione fisica medesima; che se si pone la restrizione che la distanza dei centri di massa dei due corpi si mantenga superiore ad un certo termine, questo si deve intendere un carattere integrante della forza elementare considerata. Naturalmente non si potrà senz'altro applicare al calcolo della forza acceleratrice interna la forma così trovata della forza elementare, ancor che il suddetto termine risulti inferiore a qualunque lunghezza apprezzabile; e se a ciò non serve — il caso della forza elementare newtoniana — si deve intendere che la forma stessa regga fino ad un certo limite della mutua distanza dei punti relativi, o che sia un'espressione approssimata *sensibilmente* verificata dall'esperienza per ogni distanza che i nostri comuni mezzi d'osservazione valgono ad apprezzare direttamente.

$\varkappa^2$ numero dipendente da un' unità derivata $[\varkappa^2]$, la quale, indicando per un momento con $[f]$ l'unità di quantità di forza, soddisfa a

$$[f] = [\varkappa^2 \, l^{-2} \, m^2],$$

ed è quindi rappresentata colle unità fondamentali da $[l^3 \, t^{-2} \, m^{-1}]$, si chiama la " costante della gravitazione universale ".

Forza acceleratrice e motrice di gravitazione universale.

§ 333. — Indichino (x, y, z), k e τ il punto qualunque, la grandezza della densità in esso, e quella del volume d'un corpo C; (x', y', z), k', e τ' gli stessi elementi per un altro corpo C'; e nessun punto sia comune al campo rappresentato dai due corpi medesimi.

Posto:

$$V = \varkappa^2 \int \frac{k' d\tau'}{r}, \tag{1}$$

dove:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

la forza acceleratrice (X, Y, Z) nel punto (x, y, z) determinata dal corpo C', secondo la legge newtoniana — ciò che chiameremo la forza acceleratrice di gravitazione universale determinata dal corpo C' — sarà data da

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz}; \tag{2}$$

e la risultante $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ del corrispondente sistema di forze applicato ai punti del corpo C, cioè la forza motrice di gravitazione universale del corpo C isolato con C', * da

$$\mathrm{X} = \int k \frac{dV}{dx} d\tau, \quad \mathrm{Y} = \int k \frac{dV}{dy} d\tau, \quad \mathrm{Z} = \int k \frac{dV}{dz} d\tau. \tag{3}$$

* Una circostanza fondamentale essendo la composizione della forza motrice propria del movimento mediante quelle che corrispondono all'ipotesi che il corpo sia separatamente isolato coi diversi corpi di cui s'intende in presenza,

Funzione potenziale.

§ 334. V, funzione, ad ogni istante, del posto (x, y, z), è la funzione delle forze corrispondente a (X, Y, Z), che possiamo chiamare la funzione delle forze di gravitazione universale determinata dal corpo C'.

La stessa qualità compete naturalmente a tutte le funzioni che se ne ricavano aggiungendovi una costante arbitraria, fra le quali essa si distingue per la circostanza che il suo limite coll'allontanarsi infinitamente del punto (x, y, z) è o.

Concepita come funzione del punto (x, y, z) dello spazio, essa sostiene una parte importantissima così nella teoria della gravitazione, come in parecchie altre questioni, e riceve il nome di " funzione potenziale „ del corpo sul punto relativo (che si chiamano talvolta corpo potenziante e punto potenziato).

Ci limiteremo a rilevare le seguenti proprietà che la funzione potenziale d'un corpo possiede, nella nostra ipotesi che il punto potenziato non appartenga al corpo potenziante.

V e le sue derivate rispetto alle coordinate del punto potenziato, di qualunque ordine, sono funzioni finite e continue di queste coordinate.

Indicando con ρ la grandezza della distanza del punto potenziato dal centro di massa del corpo potenziante, ρV e $\rho^2 \frac{dV}{dx}$ si mantengono inferiori, col crescere infinitamente di ρ, ad un termine assegnabile.

Si verifica l'equazione detta " di Laplace „:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

---

e ciascuna condizione fisica separatamente posseduta da ogni corpo, non ha bisogno di giustificazione l'uso dal termine forza motrice per designare il risultante di un sistema di forze applicato ai punti di un corpo, ancor che possa essere puramente un componente di quella che determina il movimento.

che scaturisce, stando la condizione che (x, y, z) non possa coincidere con $(x', y' z')$, da

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} = 0.$$

E così ogni forma che riceve la funzione V, variando le qualità geometriche del corpo potenziante, e la sua densità, sono soluzioni di questa equazione differenziale soggette alle precedenti condizioni.

Caso che uno dei corpi gravitanti sia una crosta sferica a strati concentrici omogenei.

§ 335. — Chiamiamo crosta sferica a strati omogenei concentrici un corpo limitato da due superficie sferiche concentriche, nel quale la densità è costante sopra ogni superficie sferica ad esse concentrica; e supponiamo che di due corpi isolati, mutuamente gravitanti, almeno uno, all'istante supposto, sia così fatto.

Indicando con ρ_1, ρ_2 i raggi delle due superficie sferiche limitanti la crosta, con ρ, θ, φ le coordinate polari del suo punto qualunque, assunto per polo il centro, e l'asse polare passante pel punto potenziato, con k la grandezza della densità in questo punto, con M quella della massa, con V la funzione potenziale, e finalmente con R la distanza dal centro del punto potenziato che potrà essere compreso nel cavo o ad esso esterno, abbiamo:

$$M = \int_{\rho_1}^{\rho_2} k \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} k \rho^2 \, d\rho,$$

$$V = \varkappa^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} k \rho^2 \, d\rho \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2R\rho\cos\theta + R^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi\varkappa^2}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} k\rho \, \{\rho + R \mp (\rho - R)\} \, d\rho,$$

dove va preso + o — secondo che $\rho - R > 0$ o < 0, cioè il punto potenziato interno o esterno al cavo.

Ne viene, nel primo caso:

$$V = 4\pi\varkappa^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} k\rho\, d\rho,$$

cioè V costante, e nel secondo:

$$V = \frac{\varkappa^2 M}{R};$$

donde per le (2, 3, § 333), si conclude senz'altro che la forza acceleratrice nei singoli punti e la forza motrice sarà nulla se il secondo corpo è nel cavo della crosta, e se invece è fuori della crosta, quella che corrisponde all'ipotesi ideale che alla crosta si sostituisca un punto materiale posto nel suo centro, colla stessa massa (§ 328).

Così, reciprocamente, nel caso della gravitazione universale, la forza motrice d'un punto materiale dipendente da un corpo (§ 329) è quella d'una crosta sferica a strati omogenei avente la massa del punto materiale, il centro in esso, e dimensioni tali da non raggiungere il supposto corpo o rinchiuderlo. E la forza elementare di gravitazione universale è la forza motrice di una crosta sferica a strati omogenei avente il centro nel punto a cui la forza elementare si riferisce, e la massa attribuita al punto medesimo, isolata con simile crosta sferica avente il centro nel posto del secondo punto, e la massa ad essa attribuita.

Caso di una sfera estremamente grande.

§ 336. — Sia uno dei corpi una sfera omogenea o a strati omogenei concentrici, e il rapporto della massima corda della superficie del campo assegnato al movimento degli altri al raggio di essa così piccolo da poter trascurare l'aggiunta delle sue potenze superiori nell'espressione della funzione potenziale. Indichiamo con a ed M le grandezze del raggio e della massa della sfera, e, fissato un punto a piacere nel campo, P_0, con $a + z_0$ e V_0 la grandezza della sua distanza dal centro e il valore in

esso della funzione potenziale della sfera, mentre $a + \zeta$ e V rappresenteranno la grandezza della distanza dal centro del punto qualunque, P, dello stesso campo, e il relativo valore della funzione potenziale. Si ha (§ 335):

$$V_0 = \frac{\kappa^2 M}{a + z_0},$$
$$V = V_0 \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{a + z_0} \right),$$

la prima esattamente, e la seconda sensibilmente.

Ora, immaginando il pian tangente alla sfera nel punto di intersezione col raggio descritto a P_0, se si indica con z la grandezza della distanza di P da questo piano, e con θ l'angolo dei raggi descritti a P_0 e a P, si ha:

$$z = \zeta \cos \theta - 2a \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Quindi:

$$\zeta - z = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

trascurando l'aggiunta di un termine dell'ordine del quadrato del rapporto in principio nominato, e

$$V = V_0 \left(1 - \frac{z - z_0}{a + z_0} \right),$$

trascurando similmente un termine dell'ordine del quadrato.

Poniamo:

$$\frac{\kappa^2 M}{(a + z_0)^2} = G, \tag{1}$$

e intendiamo il suddetto pian tangente assunto per piano xy, e l'asse delle z volto all'esterno.

Pel precedente risultato, coi simboli, del § 333:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -G$$
$$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{Z} = -mG,$$

con m indicando la grandezza della massa dei corpi gravitanti verso la sfera.

In altri termini, la forza acceleratrice nei singoli punti riesce sensibilmente costante, e orientata come la perpendicolare interna

al pian tangente alla sfera in un punto qualsivoglia compreso nel campo: e per conseguenza la forza motrice risulta avere la stessa orientazione, e su corpi di massa diversa grandezza proporzionale a quella della massa.

§ 337. — Sia la forza motrice del movimento d'un corpo la forza motrice in discorso, composta, se capita con una forza motrice interna (cioè colla risultante d'un sistema di forze interne) qualsivoglia. Per quanto precede (cfr. § 261), le equazioni del movimento del centro di massa sono semplicemente:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d t^2} = 0, \qquad \frac{d^2 \bar{y}}{d t^2} = 0, \qquad \frac{d^2 \bar{z}}{d t^2} = - G;$$

e quindi il suo movimento quello che, col nome di parabolico, fu studiato nel § 196.

§ 338. — Inoltre il centro di massa riesce il punto d'applicazione della forza motrice del movimento suddetto (§ 302). E per conseguenza, il movimento del corpo relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio, coll'origine nel centro di massa, soddisfarà al teorema della conservazione delle aree.

§ 339. — Notiamo che la forza motrice, e la quantità di moto areale rispetto al centro di massa, risultano indipendenti dalla posizione del corpo; e perciò il movimento del centro di massa, e la variazione col tempo della quantità di moto areale rispetto ad esso si manterranno invariati, con qualunque alterazione della configurazione del corpo che potessero determinare le forze interne.

Gravità.

§ 340. — I precedenti risultati, attribuiti alla sfera il raggio e la massa del Globo Terrestre (supposto sensibilmente una sfera a strati omogenei), si applicano senz'altro all'ordinario movimento dei corpi scagliati o abbandonati in prossimità della sua superficie — escludendo ogni contatto dei corpi considerati tra loro e col Globo, e prescindendo dalla influenza specifica (la così detta resistenza) dell'atmosfera — nell'ipotesi che gli assi di

riferimento siano assolutamente fissi, o in moto traslatorio e l'origine in moto uniforme rettilineo (§ 251): per esempio, con una certa orientazione e l'origine nel centro di massa del sistema solare. La condizione che i corpi considerati si mantengano entro un campo convenientemente limitato per riuscire estremamente piccolo in confronto del Globo si traduce in quella che all'istante iniziale la velocità del centro di massa differisca abbastanza poco da quella che compete al punto da esso occupato, concepito come invariabilmente unito al Globo, o, in altre parole, che sia abbastanza piccola la velocità del suo movimento relativo ad una terna d'assi invariabilmente uniti al Globo.

Ora il movimento in discorso quale noi *lo vediamo* risponde all'ipotesi che gli assi di riferimento siano fissi al Globo: vale a dire è il movimento relativo a sì fatti assi considerati come fissi; e la forza corrispondente sarà quindi la risultante della precedente, determinata dalla gravitazione, e delle forze apparenti conformi al movimento degli assi (§ 249).

Ammettiamo, come risultato sperimentale, che il movimento del Globo, con approssimazione tale da risultar insensibili le differenze nell'attuale questione, sia composto nel noto modo (§ 125) d'un movimento rotatorio e d'uno traslatorio, per cui il centro si move conformemente alle leggi di *Kepler* (§ 330).

Allora, poichè il centro della Terra impiega circa un anno a compiere un giro di 360°, e varia pochissimo la sua distanza dal Sole, e per conseguenza la sua velocità (4, § 331), il movimento d'una terna d'assi aventi in esso l'origine e orientazione determinata riuscirà sensibilmente uniforme rettilineo ***nel breve tempo che suol durare il movimento dei corpi scagliati o abbandonati*** alla superficie terrestre. * Ne viene che sensibilmente il primo moto componente non modificherà la forza, la quale sarà la stessa come se il movimento del Globo si riducesse alla rotazione, e cioè la risultante della forza determinata dalla gravitazione e

* In altri termini, si applicano al caso in discorso le formole del § 134, e se l'intervallo di tempo è abbastanza piccolo, si possono prendere per α, β, γ certe funzioni lineari del tempo t (§ 114). sensibilmente valide per l'intervallo medesimo.

della centrifuga e centrifuga composta corrispondenti alla rotazione medesima.

Dinoti ω la grandezza della velocità angolare, e assunto il centro del globo per origine e l'asse di rotazione per asse delle $\mathfrak{z}$; siano $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$ e $\mathfrak{x}_0 + \xi$, $\mathfrak{y}_0 + \eta$ le coordinate nel piano $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$, del punto P_0 e del punto P (§ 339). Le componenti dell'accelerazione centrifuga di P saranno:

$$\omega^2 (\mathfrak{x}_0 + \xi), \qquad \omega^2 (\mathfrak{y}_0 + \eta), \qquad 0.$$

Ora, assunto il metro per unità di lunghezza, la misura del raggio terrestre risulta all'incirca:

$$\frac{20\,000\,000}{\pi};$$

assunto in oltre per unità di misura del tempo il minuto secondo, si ha:

$$\omega = \frac{2\pi}{24.60.60};$$

e dall'esperienza, prossimamente, alla superficie terrestre:

$$G = 9{,}8.$$

Possiamo quindi reputare come insensibile l'aggiunta a grandezze dell'ordine di G del prodotto di ω^2 per grandezze dello stesso ordine, e non per rispetto ad esse estremamente grandi, come quella della misura del raggio terrestre. E ciò stabilito, le componenti dell'accelerazione centrifuga risultano sensibilmente:

$$\omega^2 \mathfrak{x}_0 \qquad \omega^2 \mathfrak{y}_0, \qquad 0;$$

cioè l'accelerazione centrifuga riesce costante nel campo considerato, non altrimenti che l'accelerazione di gravitazione, in conseguenza di che costante nel campo la loro risultante.

Chiamiamo la retta passante pel centro del Globo e pel punto P_0 la “ verticale del campo „, e la latitudine α di P_0 la “ latitudine del campo „. L'accelerazione di gravitazione ha la direzione della verticale del campo volta verso il centro, o come diremo “ in basso „: e l'accelerazione centrifuga quella della traccia del semipiano terminato all'asse passante per la verticale — “ piano meridiano del campo „ — sul “ piano parallelo del

campo „, così chiamando il piano perpendicolare all'asse passante per P_0, volta dall' asse all'infuori. Inoltre le loro grandezze sono rispettivamente G e $\omega^2 a \cos \alpha$.

Ne viene subito per grandezza della risultante, indicandola con g:

$$g = \sqrt{G^2 - 2\, G\, \omega^2\, a \cos^2 \alpha + \omega^4\, a^2 \cos^2 \alpha}$$

o approssimativamente:

$$g = G \left(1 - \frac{\omega^2 a}{G} \cos^2 \alpha \right); \tag{1}$$

e per quanto all'orientazione, indicando con γ l'angolo formato dall'opposta colla suddetta traccia sul piano parallelo del campo:

$$(G - \omega^2 a) \cos \alpha = g \cos \gamma, \qquad G \sin \alpha = g \sin \gamma,$$

donde sensibilmente:

$$\tan \gamma = \tan \alpha \left(1 + \frac{\omega^2 a}{G} \right),$$

$$\gamma - \alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 a}{G} \sin 2\alpha; \tag{2}$$

per modo che la risultante in discorso forma colla verticale volta in basso un angolo variabile colla latitudine, nel piano meridiano, dalla parte di mezzogiorno.

Diremo l'orientazione della risultante medesima quella del " filo a piombo „ nel luogo relativo. Il valor assoluto dell'angolo da essa formata colla verticale volta in basso, secondo la precedente formola, è lo stesso per eguali valori assoluti della latitudine, e riceve un massimo valore per $|\alpha| = \frac{\pi}{4}$, cioè per la latitudine boreale ed australe di 45°, la cui misura (circolare) è rappresentata da:

$$\frac{1}{2} \frac{\omega^2 a}{G},$$

che risulta prossimamente:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{291}.\,*$$

* Quindi l'angolo è circa un decimo di grado.

§ 341. — A questa accelerazione, o alla relativa forza acceleratrice, corrisponde una forza motrice del corpo che si supponga compreso nel campo considerato, avente l'orientazione del filo a piombo, e grandezza *mg*, *proporzionale alla massa del corpo.*

Questa forza motrice è ciò che si chiama il “ peso „ del corpo nel luogo considerato; e così “ *in un determinato luogo,* la massa dei vari corpi è proporzionale al loro peso „.

§ 342. — La proprietà che hanno i corpi naturali di possedere in prossimità della superficie terrestre il peso si chiama “ gravità „: e conformemente a ciò si dice “ accelerazione di gravità „ e “ forza acceleratrice di gravità “ la risultante delle accelerazioni e forze acceleratrici di gravitazione e centrifuga, che abbiamo precedentemente studiato e determina il peso. Oltre di che il movimento corrispondente si chiama “ movimento di gravità „, o “ movimento dei gravi „; “ grave „ chiamandosi in particolare un mobile quando quello è il suo movimento (cfr. 344).

§ 343. — Concepito il sistema delle forze acceleratrici di gravità applicato ai punti del corpo, la sua risultante, che è il peso del corpo, ammette per punto d'applicazione il centro di massa.

E per la suddetta ragione questo punto si chiama perciò anche il “ centro di gravità „ del corpo.

§ 344. — Se un corpo si suppone in equilibrio relativo al Globo Terrestre (che è quando *lo vediamo* immobile) vuol dire che col suo peso si compone una forza motrice ad esso eguale ed opposta. Se ha luogo invece movimento relativo al globo (che è il movimento che noi *vediamo*) e questo movimento è determinato, col concorso di forze interne, dalla gravitazione rispetto alla Terra, la forza motrice corrispondente sarà la risultante del peso e della forza motrice centrifuga composta conforme alla rotazione terrestre.

Ora le componenti dell'accelerazione centrifuga composta nel punto di cui $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sono le coordinate al tempo t rispetto agli assi mobili precedentemente definiti (§ 203) — stabilito che si assuma come positivo il senso della rotazione diurna ri-

spetto all'asse terrestre volto da sud a nord (cfr. §§ 10, 20)* — sono:

$$2\omega \frac{d\mathfrak{y}}{dt}, \qquad -2\omega \frac{d\mathfrak{x}}{dt}, \qquad \text{o:}$$

e perciò la grandezza $2\omega\mathfrak{w}\sin(\mathfrak{w}z)$, indicando con $\mathfrak{w}$ la grandezza della velocità del movimento relativo: il quale numero sarà assai piccolo in confronto di g — almeno nell'ipotesi da noi ammessa che $\mathfrak{w}$ si mantenga entro ristretti limiti — per modo che la forza motrice del movimento relativo in discorso, ad ogni istante, si confonderà sensibilmente col peso del corpo considerato.

Per la stessa ragione, il movimento del centro di massa sarà sensibilmente quello che corrisponde all'ipotesi che l'accelerazione in ogni posto sia l'accelerazione di gravità, cioè un movimento parabolico (§ 196): almeno con una durata abbastanza breve; come si arguisce dalla stessa espressione delle coordinate in funzione del tempo in quel caso, che sono funzioni intere quadratiche, dalle quali si possono concepire dedotte le espressioni rigorose convenienti al considerato movimento relativo applicando ai parametri certi aumenti, funzioni del tempo, *che svaniscono con* ω, e avranno quindi valori piccolissimi pel valore che compete alla rotazione terrestre.

Così si ritrovano le leggi del momento dei gravi enunciate per la prima volta da *Galileo.*

Intendiamo, conformemente a ciò, che, nel “ movimento dei gravi „ si prescinda, salvo affermare il contrario, dalla forza centrifuga composta (cfr. § 342).

§ 345. — Del resto è facile determinare il movimento del centro di massa d'un grave, anche tenendo calcolo della forza centrifuga composta; ciò che passiamo a fare, convenendo di trascurare, come senza influenza apprezzabile, l'aggiunta di termini che sono il prodotto di ω^2 per un numero (calcolato colle

* Questa convenzione s'intenderà fatta in tutte le questioni attinenti al movimento relativo al Globo; con che ω rappresenterà la grandezza della velocità angolare della rotazione diurna, e sarà un numero positivo.

unità ordinarie) abbastanza limitato, e non estremamente grande, com'è invece la misura del raggio terrestre. *

Assumiamo a tal fine per origine degli assi mobili il suo posto iniziale, e sia l'asse delle $\mathfrak{z}$ orientato come l'asse terrestre volto verso nord, l'asse delle $\mathfrak{x}$ nel meridiano dalla parte a sud, e l'asse delle $\mathfrak{y}$ verso est **. Siano in tale ipotesi $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ le coordinate del centro di massa al tempo t. Abbiamo senz'altro:

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = -g\cos\gamma + 2\omega\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = -2\omega\frac{d\mathfrak{x}}{dt},$$

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = -g\sin\gamma:$$

equazioni differenziali del movimento, alle quali, indicando con $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{w}_0$ le componenti della velocità iniziale del movimento relativo medesimo, si aggiungono le condizioni:

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{u}_0, & \dfrac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{v}_0, & \dfrac{d\mathfrak{z}}{dt} = \mathfrak{w}_0 \\ \mathfrak{x} = 0, & \mathfrak{y} = 0, & \mathfrak{z} = 0. \end{array} \right.$$

Con ciò dalla seconda si ha:

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{v}_0 - 2\omega\mathfrak{x};$$

quindi, dalla prima, trascurando l'aggiunta di $-4\omega^2\mathfrak{x}$:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}_0 t - \frac{1}{2}(g\cos\gamma - 2\omega\mathfrak{v}_0)t^2;$$

e introducendo questo risultato nella seconda, ommesso il termine $-4\omega^2\mathfrak{v}_0 t$:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{v}_0 t - \omega\mathfrak{u}_0 t^2 + \frac{\omega g\cos\gamma}{3}t^3.$$

---

* Non bisogna dimenticare che questa supposizione è implicita in quella che riesca costante in tutto il campo del movimento l'accelerazione centrifuga (§ 340); e per conseguenza l'accelerazione di gravità. Che in tal modo si ottenga realmente una seconda approssimazione del movimento si può riconoscere col ragionamento che ci serve per la prima.

** Cfr. la nota a piedi di pagina del § 344.

La terza fornisce poi immediatamente:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{w}_0\, t - \frac{1}{2}\, g \sin\gamma\, t^2.$$

Supponiamo $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{v}_0 = \mathfrak{w}_0 = 0$, cioè nulla la velocità iniziale del moto relativo, che sarà il caso che l'*osservatore* abbandona il grave. Allora:

$$\mathfrak{x} = -\frac{1}{2}\, g \cos\gamma\, t^2, \quad \mathfrak{y} = \frac{\omega\, g \cos\gamma}{3}\, t^3, \quad \mathfrak{z} = -\frac{1}{2}\, g \sin\gamma\, t^2.$$

Di qui:

$$\mathfrak{x} \sin\gamma - \mathfrak{z} \cos\gamma = 0, \quad \mathfrak{x} \cos\gamma + \mathfrak{z} \sin\gamma = -\frac{1}{2}\, g\, t^2;$$

cioè, immaginando, coll'origine nello stesso punto di partenza, una coppia d'assi $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{z}'$, congruenti con $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, ed egualmente posti nel meridiano di quel punto, ma $\mathfrak{z}'$ orientato come il filo a piombo:

$$\mathfrak{x}' = 0, \qquad \mathfrak{z}' = \frac{1}{2}\, g\, t^2.$$

Quindi il centro di massa del grave si moverà nel piano passante pel punto di partenza orientato come il filo a piombo e perpendicolare al meridiano del punto stesso; nel qual piano:

$$\mathfrak{y} = \frac{\omega\, g \cos\gamma}{3}\, t^3, \qquad \mathfrak{z}' = \frac{1}{2}\, g\, t^2,$$

cioè:

$$\mathfrak{y} = \frac{\omega \cos\gamma}{3} \sqrt{\frac{8\, \mathfrak{z}'^3}{g}},$$

dove, essendo la misura di t positiva, va preso del radicale il segno $+$.

Questa è l'equazione della trajettoria nel suddetto piano perpendicolare al meridiano del punto di partenza. Siccome ω è positivo, $\mathfrak{y}$ riesce positivo: cioè la trajettoria, che è un ramo di parabola semicubica col vertice nel punto di partenza, e la tangente in esso nella direzione del filo a piombo, correrà nella metà del piano che volge ad oriente.

Questo è il fenomeno della deviazione ad oriente dal filo a piombo, dei corpi liberamente cadenti, sul quale istituirono

esperimenti Tadini (1795) a Bergamo, e Reich a Freyburg. Con

$$\gamma = 50^{\circ}\ 57' \qquad g = 9{,}811, \qquad \mathfrak{z}' = 158^{m}{,}5$$

Reich trovò $\mathfrak{y} = 28^{mm}{,}4$. La formola dà con questi valori $\mathfrak{y} = 27^{mm}{,}5$.*

§ 346. La sensibile indipendenza della forza acceleratrice di gravità dal punto cui si riferisce, e per conseguenza della forza motrice dalla posizione del corpo, è la circostanza che ci permette di determinare, nel modo che abbiamo fatto, il movimento del centro di massa, senza bisogno d'altri dati, come sarebbero le forze interne. Invece, senza nuovi dati, non è possibile completare l'indagine colla determinazione del movimento relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio coll'origine nel centro di massa.

Rileveremo, in proposito, che, per la suddetta circostanza, data la posizione e la velocità del centro di massa ad un istante, il suo movimento non cambierà, comunque possa variare quel movimento relativo colle forze interne, e le condizioni iniziali corrispondenti. Donde scaturiscono notevoli conseguenze. E per esempio, il centro di massa d'una bomba, una volta lanciata, compie lo stesso movimento, avvenga o no lo scoppio; lo sforzo muscolare, senza l'aiuto dell'attrito del suolo, della resistenza d'un punto d'appoggio, e simili azioni, non potrà modificare il movimento del centro di massa dell'animale che lo esercita; l'abbassamento d'una parte *conveniente* d'un grave, originariamente in quiete, sarà accompagnata dall'ascensione della parte rimanente, ciò che forma il principio dei razzi; e via discorrendo.

Che se si prescinde dalla forza centrifuga composta, la quantità di moto areale rispetto ad un punto qualsivoglia del movimento relativo in discorso riesce costante; donde scaturiscono conseguenze analoghe a quelle che abbiamo rilevato nel caso della forza motrice nulla (§ 315).

§ 347. Riflettiamo che si è stabilita la forza motrice di gravità partendo dalle leggi di *Kepler:* leggi sperimentali appros-

---

* *Kirchkoff* — Mechanick, 9.te Vorl., § 2.

simative del movimento dei pianeti. Il movimento ad essa corrispondente collima, come abbiamo osservato, con quello che l'esperienza verifica nei corpi abbandonati o lanciati presso la superficie terrestre, prescindendo dall'influenza dell'atmosfera e rimossa ogn' altra causa perturbatrice. Alla stessa esperienza è riserbato di constatare come quella forza motrice, che abbiamo chiamato peso del corpo nel campo o luogo considerato, traduce il ben noto fatto del peso, come l'intendiamo nel linguaggio famigliare: così che, immaginando di applicare ad un caso pratico una formola che include la forza motrice medesima, si deve prendere per essa un peso determinato, nel significato comune della parola.

In tal modo la forza motrice si rende per così dire sensibile: o che si concepisca senz'altro come un peso, o che s'immagini un peso che si possa reggere per mezzo di essa. È senza dubbio sotto questa forma palpabile che la forza motrice s'impose all'attenzione dell'uomo: e varie applicazioni alla pratica sono sempre collegate con tale concetto. Ciò, in confronto dell'ufficio della forza motrice nella teoria generale del movimento, vuol essere riguardato come una semplice circostanza accidentale: nè altrimenti che fondandosi sopra una definizione come l'abbiamo data, si può stabilire quell'ufficio nella sua completa generalità.

Unità pratiche.

§ 348. Per comodità pratica, nelle applicazioni più comuni della Meccanica, il peso non si suol misurare coll'unità assoluta di forza (§ 236), ma assumendo per unità un peso determinato, indipendentemente prescelto. Nei paesi dove vige il sistema metrico decimale l'unità fondamentale di peso è il " grammo ": peso d'un centimetro cubo d'acqua distillata a 4° della scala centigrada, ***nel supposto luogo:*** da non confondersi coll'unità di massa, chiamata collo stesso nome (§ 236), ch'è invece invariabile. Rispetto all'unità assoluta, la misura del peso dell'unità di massa risulta g, così indicando la misura dell'accelerazione di

gravità in quel luogo. Quindi, assunto il grammo massa per unità di massa, g sarà la misura assoluta del grammo peso, variabile colla latitudine conformemente alla (1, § 340), ove G può considerarsi come il valore ai poli.

Stabilita l'unità di peso, essa, oppure un suo multiplo, si prende nel luogo considerato per unità di forza. Così, per queste unità suol esser preso da noi il chilogrammo, peso d'un decimetro cubo d'acqua distillata a 4° centigradi, la cui misura rispetto al grammo è 10^3, e rispetto all'unità assoluta di forza $10^3\,g$.

Infine, conformemente alle precedenti unità, si assume per unità di lavoro quello che corrisponde ad una caduta libera d'un corpo, il cui peso è l'unità di forza, per la quale il centro di massa si abbassi nella direzione del filo a piombo per l'unità di lunghezza: lavoro che, nell'ipotesi che l'unità di forza sia il chilogrammo, e l'unità di lunghezza il metro, si chiama il " chilogrammetro ".

PARTE SECONDA.

CALCOLO DEL MOVIMENTO

CAPITOLO PRIMO.

CORPI RIGIDI LIBERI.

Condizioni imposte al movimento.

§ 349. — Calcolare il movimento d'un corpo significa dedurlo col ragionamento da circostanze date. Ora l'esperienza constata che il movimento d'un complesso di corpi è sufficientemente determinato dalla loro qualità e condizione fisica, coll'aggiunta di certe circostanze iniziali, fra le quali la posizione e l'atto di movimento. Che se fosse possibile con questi dati, assegnare *a priori* alla forza acceleratrice interna (X_i, Y_i, Z_i) ed esterna (X_e, Y_e, Z_e) nel punto qualunque d'un corpo, concepito isolato con uno o più altri, un'espressione tale che dalle equazioni (1,, § 262):

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = X_i + X_e, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = Y_i + Y_e, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = Z_i + Z_e$$

risultasse determinato (x, y, z) in funzione del tempo t e del suo posto iniziale (x_0, y_0, z_0), il movimento si potrebbe dire, in base ai dati medesimi, dedotto dalla pura conoscenza delle forze.

Ma già la determinazione della forza elementare si deve considerare come praticamente impossibile tosto che manchi la condizione che la distanza dei due punti si mantenga superiore ad un certo termine, come occorre per dedurne la forza acce-

leratrice interna, ed anche esterna, nel caso che le superficie di due mobili possano venire a mutuo contatto. Per modo che, se essa c'è stata utile per stabilire le leggi generali del movimento, non si può fondarvi, senz'altro, il calcolo effettivo. Nè minor difficoltà offre, nei casi medesimi, la determinazione diretta delle forze acceleratrici interna ed esterna.

Il calcolo effettivo del movimento richiede che fra le circostanze date si comprendano alcune proprietà del movimento medesimo, ammesse *a priori*, diverse a seconda del caso, le quali si traducono in altrettante condizioni imposte ai corpi considerati.

Da questo punto di vista si distinguono i " corpi rigidi „; corpo rigido chiamandosi un mobile al cui movimento si attribuisce *a priori* la proprietà che le mutue distanze dei punti si mantengono inalterate, *qualunque siano le forze e le condizioni iniziali*, donde segue che si manterrà invariata, oltre la figura, la densità in ogni punto, poichè (§ 184) sarà:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

e quindi (§ 240):

$$\frac{dk}{dt} = 0.$$

Un corpo non rigido si chiama, in generale " variabile „, e quando si compone di parti ciascuna delle quali è un corpo rigido, " un sistema di corpi rigidi „; che se alle parti non è prescritta altra condizione, come sarebbe quella che la distanza dei centri di massa si serbi costante, o le superficie si tocchino, o sia prefissata la trajettoria d'un punto, il sistema si dice composto di corpi rigidi " liberi „.

Equazioni del movimento d'un sistema di corpi rigidi liberi.

§ 350. — Dato un sistema di corpi rigidi di determinata figura e densità, siccome la posizione di ciascuno sarà determinata da sei parametri — per esempio dalle coordinate di un punto e da tre angoli fissanti l'orientazione d'una terna d'assi aventi

quel punto per origine — il calcolo del movimento del sistema si riduce alla determinazione di questi parametri, per ogni corpo, in funzione del tempo.

Ora, assunta la solita terna d'assi coordinati cartesiani, e mantenuto ai simboli il precedente significato, per ogni corpo hanno luogo le sei equazioni cardinali (§ 306):

$$\left.\begin{array}{c}
\int k \frac{d^2 x}{dt^2}\, d\tau = X, \quad \int k \frac{d^2 y}{dt^2}\, d\tau = Y, \quad \int k \frac{d^2 z}{dt^2}\, d\tau = Z \\
\int k \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) d\tau = M_x, \\
\int k \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) d\tau = M_y, \\
\int k \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) d\tau = M_y.
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Dinotino $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ le coordinate al tempo t del centro di massa del corpo cui le precedenti equazioni si riferiscono, m la grandezza della massa, e poniamo:

$$x = \bar{x} + \xi, \qquad y = \bar{y} + \eta, \qquad z = \bar{z} + \zeta.$$

Le equazioni medesime si potranno porre sotto la forma (§§ 261, 311):

$$\begin{array}{c}
m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = X, \qquad m \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = Y, \qquad m \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = Z, \qquad (2) \\
\int k \left(\eta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) d\tau = \mathbf{M}_x, \\
\int k \left(\zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right) d\tau = \mathbf{M}_y, \\
\int k \left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) d\tau = \mathbf{M}_z,
\end{array}$$

dove:

$$\mathbf{M}_x = M_x - \bar{y} Z + \bar{z} Y, \quad \mathbf{M}_y = M_y - \bar{z} X + \bar{x} Z, \quad \mathbf{M}_z = M_z - \bar{x} Y + \bar{y} X,$$

per modo che $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ sono le componenti del risultante dei momenti del supposto sistema di forze rispetto al punto occupato dal centro di massa al tempo t (cfr. § 311).

Immaginiamo ora gli assi principali d'inerzia relativi allo stesso centro di massa, colla loro orientazione al tempo t, e preso il senso in modo che, distinguendoli per un momento cogli indici 1, 2, 3, il giro conducente per l'angolo retto da 1 a 2 sia positivo rispetto a 3, indichino α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ i loro coseni di direzione: P, Q, R i momenti d'inerzia corrispondenti: $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, le componenti della velocità angolare del corpo secondo tre assi aventi l'orientazione medesima.

Le ultime tre delle precedenti equazioni, avendosi per (2, § 308):

$$\int k\left(\zeta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt}\right) d\tau = P\mathfrak{p}\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\alpha_2 + R\mathfrak{r}\alpha_3,$$

e le analoghe, si potranno scrivere così:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(P\mathfrak{p}\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\alpha_2 + R\mathfrak{r}\alpha_3)}{dt} &= \mathrm{M}_x \\ \frac{d(P\mathfrak{p}\beta_1 + Q\mathfrak{q}\beta_2 + R\mathfrak{r}\beta_3)}{dt} &= \mathrm{M}_y \\ \frac{d(P\mathfrak{p}\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\gamma_2 + R\mathfrak{r}\gamma_3)}{dt} &= \mathrm{M}_z \end{aligned}\right\} \qquad (2)'$$

E si può anche ottenere un sistema equivalente nel seguente modo. Indichiamo con $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{M}_\mathfrak{y}$, $\mathfrak{M}_\mathfrak{z}$ le componenti dello stesso risultante dei momenti secondo i suddetti tre assi, aventi l'orientazione degli assi principali d'inerzia relativi al centro di massa al tempo t, per modo che:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathrm{M}_x \alpha_1 + \mathrm{M}_y \beta_1 + \mathrm{M}_z \gamma_1, \\ \mathfrak{M}_\mathfrak{y} &= \mathrm{M}_x \alpha_2 + \mathrm{M}_y \beta_2 + \mathrm{M}_z \gamma_2, \\ \mathfrak{M}_\mathfrak{z} &= \mathrm{M}_x \alpha_3 + \mathrm{M}_y \beta_3 + \mathrm{M}_z \gamma_3. \end{aligned}$$

Moltiplicando le suddette equazioni (2)' rispettivamente per α_1, β_1, γ_1, poi sommandole membro a membro, il secondo membro risulterà $\mathfrak{M}$ e il primo, valendosi dell'identità:

$$\alpha_1 \frac{dV}{dt} = \frac{d\alpha_1 V}{dt} - V\frac{d\alpha_1}{dt},$$

qualunque sia la funzione rappresentata da V, delle (4, § 159),

e delle relazioni fra le $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, si riconoscerà subito come riesca:

$$P \frac{d\mathfrak{p}}{dt} - (Q - R)\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}.$$

Si otterrà quindi la prima delle tre equazioni:

$$\left.\begin{aligned} P \frac{d\mathfrak{p}}{dt} - (Q - R)\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r} &= \mathfrak{M} \\ Q \frac{d\mathfrak{q}}{dt} - (R - P)\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{p} &= \mathfrak{M}_{\mathfrak{y}} \\ R \frac{d\mathfrak{r}}{dt} - (P - Q)\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} &= \mathfrak{M}_{\mathfrak{z}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)''$$

che costituiscono la terna in discorso equivalente a (2).

Indichino φ, f e θ gli angoli che fissano l'orientazione della terna considerata degli assi principali d'inerzia relativi al centro di massa, conformemente al § 24, prendendo i tre assi, col senso stabilito, ordinatamente per asse delle $\mathfrak{x}$, delle $\mathfrak{y}$ e delle $\mathfrak{z}$. Saranno α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ le note funzioni di questi angoli (§ 24), e $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ le funzioni parimente note (§ 160) degli stessi angoli e di $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{df}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$.

Per quanto a X, Y, Z e M_x, M_y, M_z siccome il loro valore si deve intendere determinato dalla posizione di tutti i corpi del sistema, saranno in generale certe funzioni delle coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ dei centri di massa di tutti i corpi, e degli angoli φ, f e θ che fissano l'orientazione degli assi principali d'inerzia relativi al centro di massa, presi nel debito senso, parimente di tutti i corpi componenti il sistema.

Questo s'intende nel movimento assoluto. Pel movimento relativo ad una terna d'assi mobili stanno, secondo le conclusioni del § 326, equazioni della stessa forma; soltanto che X, Y, Z e M_x, M_y, M_z, com'è agevole rilevare dalle conclusioni medesime, riusciranno in generale anche funzioni esplicite del tempo, e delle derivate prime rispetto al tempo delle variabili suddette, appartenenti allo stesso corpo.

Segue da ciò che le (2) e le (2)' o (2)'' pei singoli corpi componenti il sistema mobile considerato costituiscono in ogni

caso un sistema d'equazioni differenziali alle derivate ordinarie del 2.° ordine, dove le incognite sono i parametri $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \varphi, f$ e θ dei singoli corpi medesimi, e la variabile indipendente il tempo t, in numero sestuplo di quello dei corpi, e cioè pari a quello complessivo delle incognite suddette. Esso varrà quindi a determinare le incognite in funzione del tempo, per modo che ad ogni istante risulterà nota la posizione d'ogni corpo, e noto il movimento del sistema, dati ad un istante i valori dei parametri e loro coefficienti differenziali primi: cioè la posizione e l'atto di movimento del sistema.

Notiamo che il movimento d'ogni corpo rigido componente si potrà concepire come composto d'un movimento traslatorio, la cui traslazione è quella del centro di massa, e d'un movimento polare col polo nel centro di massa. I quali movimenti sono separatamente determinati da $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ e φ, f, θ.

Vediamo così come, sotto la condizione della rigidità del movimento d'ogni corpo, il complesso delle equazioni cardinali d'un sistema composto d'un numero qualunque di corpi (unitamente alla posizione e all'atto di movimento ad un istante) valga a determinare completamente il movimento. Perciò esso (come ogni sistema d'equazione equivalente che se ne ricavi) si chiamerà anche il sistema delle equazioni del movimento.

§ 351. — Verificandosi per ogni corpo del sistema le (1, § 350) si avrà anche (§ 305):

$$\Sigma \int k \left\{ \left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X_e \right) \delta x + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y_e \right) \delta y + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z_e \right) \delta z \right\} d\tau = 0,$$

dove la sommatoria abbraccia tutti i corpi. E questa equazione può scriversi così:

$$\int k \left\{ \left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X_e \right) \delta x + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y_e \right) \delta y + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z_e \right) \delta z \right\} d\tau = 0, \quad (1)$$

intendendo ora che τ dinoti il volume del campo rappresentato complessivamente da tutti i corpi del sistema al tempo t, e $(\delta x, \delta y, \delta z)$ sia la velocità a questo istante del punto qualunque di cui (x, y, z) è il posto all'istante medesimo, per un atto di movimento virtuale qualsivoglia del sistema. Notiamo che

(X_t, Y_t, Z_t) è la forza acceleratrice in questo punto, al supposto istante, esterna per rispetto al corpo del sistema cui il punto appartiene; che se si tratta di movimento relativo ad una terna d'assi mobili si dovrà tener calcolo delle forze apparenti (cfr. § 326).

Alla sua volta da questa equazione si ricava il sistema (1, § 350) per ogni corpo, supponendo la velocità virtuale nulla nei punti di ciascun altro, e quello che si considera successivamente in atto traslatorio con velocità parallela a ciascuno degli assi coordinati, e in atto rotatorio con ciascuno degli assi medesimi per asse istantaneo di rotazione.

Per conseguenza l'equazione suddetta equivale al sistema completo delle equazioni del movimento (cfr. § 305).

§ 352. — Il teorema della forza viva, essendo nulla per ogni corpo la potenza del sistema delle forze interne rispetto al corpo corrispondente all'atto di movimento *effettivo* del sistema ad ogni istante, risulta espresso dall'equazione:

$$T - T_0 = \int k\, d\tau \int \left(X_t\, dx + Y_t\, dy + Z_t\, dz \right);$$

la quale si deduce pure da (1) del precedente §, applicandola all'atto di movimento effettivo del sistema al tempo t.

In conseguenza di ciò, quando ammetta il potenziale il sistema delle forze applicato ai punti dei singoli corpi, esterne rispetto a ciascun corpo, il movimento del sistema composto dei corpi medesimi soddisfarà il teorema della conservazione dell'energia (cfr. §§ 283, 290).

Quindi il teorema della conservazione dell'energia è soddisfatto, sotto la condizione della rigidità dei singoli corpi, nel movimento di un sistema di corpi determinato dalla mutua gravitazione universale, e dalla gravità (cfr. §§ 320, 332 e 293, 340).

§ 353. — Alle equazioni differenziali del movimento, il cui numero, pari a quello delle variabili individuanti la posizione di tutti i corpi, è sestuplo di quello dei corpi, corrisponderà un numero doppio (l'ordine essendo il secondo) d'equazioni integrali fra il tempo, le incognite, cioè le suddette variabili, e le loro derivate prime rispetto al tempo, oltre di che altrettante

costanti arbitrarie, che saranno determinate dal valore delle variabili e loro derivate ad un istante.

Di queste equazioni, quando si verifica il teorema della conservazione del movimento del centro di massa, sei sono:

$$\Sigma m \frac{d\bar{x}}{dt} = C, \quad \Sigma m \bar{x} = Ct + C'$$

e le analoghe, dove la sommatoria si estende a tutti i corpi del sistema, e C, C' sono simboli di costanti arbitrarie: quando si verifica il teorema della conservazione delle aree rispetto al punto preso per origine degli assi fissi, tre sono (§ 309, § 308):

$$\Sigma \left\{ m \left(\bar{y} \frac{d\bar{z}}{dt} - \bar{z} \frac{d\bar{y}}{dt} \right) + P\mathfrak{p}\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\alpha_2 + R\mathfrak{r}\alpha_3 \right\} = Cost.$$

e le due analoghe: finalmente, quando si verifica il teorema della conservazione dell'energia, una è (§ 281):

$$\Sigma \left\{ m \left(\left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{z}}{dt} \right)^2 \right) + P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2 + R\mathfrak{r}^2 \right\}$$
$$= 2\,W + h,$$

dove h dinota una costante arbitraria, e W il potenziale del sistema delle forze applicate ai punti dei singoli corpi, esterne rispetto a ciascun corpo, che sarà una funzione delle variabili individuanti la posizione dei corpi medesimi.

Perciò queste equazioni si chiamano gl'integrali rispettivamente del centro di massa, delle aree e della forza viva.

Osserviamo che se il componente polare rispetto al centro di massa del movimento d'ogni corpo soddisfa il teorema della conservazione delle aree, oltre aversi per ogni corpo:

$$P\mathfrak{p}\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\alpha_2 + R\mathfrak{r}\alpha_3 = Cost.$$

e le due analoghe, che farà un numero triplo di quello dei corpi d'equazioni integrali, l'integrale delle aree pel sistema acquisterà la forma:

$$\Sigma m \left(\bar{y} \frac{d\bar{z}}{dt} - \bar{z} \frac{d\bar{y}}{dt} \right) = Cost.$$

E se lo stesso movimento componente soddisfa il teorema della conservazione dell' energia, oltre che si avrà per ogni corpo:

$$P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2 + R\mathfrak{r}^2 = U + Cost.$$

ove U è una funzione delle variabili individuanti la posizione dei corpi, che forma tante equazioni integrali quanti sono i corpi, l'integrale della forza viva pel sistema prenderà la forma:

$$\Sigma\, m \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = \Phi + Cost.$$

dove Φ rappresenta una funzione delle suddette variabili.

La ricerca più o meno completa delle equazioni integrali costituisce poi in generale un arduo problema d'analisi, di cui non intendiamo occuparci, bastandoci di riconoscere come il problema della determinazione del movimento si traduca in equazioni. Esamineremo invece qualche caso particolare.

Movimento per inerzia.

§ 354. — "Movimento per inerzia„ d'un corpo rigido si dice quello che corrisponde all'ipotesi che il sistema delle forze esterne applicato ai punti del corpo sia nullo, ossia nullo il risultante delle forze stesse e dei loro momenti rispetto ad un punto qualsivoglia.

In tal caso, abbiamo, conformemente alle (2) e alle (2)'' del § 350, le sei equazioni del movimento:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} P\frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= (Q - R)\,\mathfrak{q}\mathfrak{r} \\ Q\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= (R - P)\,\mathfrak{r}\mathfrak{p} \\ R\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= (P - Q)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dove x, y, z indicano ora le coordinate del centro di massa; alle quali vanno collegate le (1, § 160), e aggiunte le condizioni iniziali:

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{ll} x = x_0, \; y = y_0, \; z = z_0, \; \frac{dx}{dt} = x_0', \; \frac{dy}{dt} = y_0', \; \frac{dz}{dt} = z_0', & (1)' \\ \varphi = \varphi_0, \; f = f_0, \; \theta = \theta_0, \; \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0', \; \frac{df}{dt} = f_0', \; \frac{d\theta}{dt} = \theta_0'. & (2)' \end{array} \right.$$

Osserviamo, in primo luogo, che se si pone:

$$t = 0: \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0, \qquad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0, \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0, \qquad (2)''$$

in conseguenza delle ricordate (1, § 160), $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{r}_0$ riesciranno determinate dalle (2)', e reciprocamente queste condizioni potranno sostituire tre di quelle per determinare tre dei relativi valori iniziali.

Ciò posto, le (1) determineranno il movimento del centro di massa, colle (1)', che ne assegnano il posto e la velocità ad un istante.

E le (2) determineranno il movimento del corpo relativo ad una terna d'assi coll'origine nel centro di massa e l'orientazione costante degli assi fissi, cioè il componente polare rispetto al centro di massa del movimento considerato, mediante l'orientazione della terna d'assi coordinati formata dagli assi principali d'inerzia nel centro di massa ad ogni istante: col concorso delle (2)', che assegnano all'istante iniziale l'orientazione del corpo, cioè di questi assi, e l'atto di movimento, vale a dire la velocità angolare del movimento polare.

Così il problema vien decomposto distintamente in due, a ciascun dei quali toccano tre equazioni del movimento, e quindi sei equazioni integrali, formanti due gruppi indipendenti.

Il movimento del centro di massa risulta per le (1) uniforme rettilineo, compreso il caso che, la velocità iniziale essendo 0, sia nullo conformemente al teorema della conservazione del movimento del centro di massa. E le corrispondenti sei equazioni integrali sono quelle del centro di massa (§ 353).

Il movimento relativo è retto dalle (2), che sono tre equazioni differenziali alle derivate ordinarie del 1.° ordine fra il

tempo t e le $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$: atte quindi a determinare, colle (2)'', direttamente queste variabili in funzione del tempo. Che se $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ si concepiscono funzioni note del tempo, le (1, § 160) riescono tre equazioni differenziali del 1.° ordine fra t e gli angoli φ, f e θ, atte a determinare, colle prime tre delle (2)', in funzione di t gli angoli medesimi.

§ 355. — Nel caso particolare di $P = Q = R$ le (2) del precedente § si riducono a:

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0;$$

donde si ha immediatamente, per le (2)'':

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0, \qquad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0, \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0,$$

esprimenti che il movimento polare si riduce ad un movimento rotatorio uniforme: poichè, in virtù di esse, la velocità angolare serba costante la grandezza, e la direzione rispetto ai tre assi principali d'inerzia relativi al centro di massa, mentre come tali si possono assumere tre rette ortogonali qualunque passanti pel punto medesimo (§ 279).

§ 356. — Supponiamo, in secondo luogo, $P = Q$. La terza delle suddette equazioni si riduce a:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0,$$

donde per le suddette (2)'':

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0, \tag{1}$$

ch'è una prima equazione integrale. Con ciò le prime due diventano:

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = -\frac{R-P}{P}\,\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{q}, \qquad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \frac{R-P}{P}\,\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{p},$$

manifestamente soddisfatte da:

$$\mathfrak{p} = a\cos(\lambda t + \mu), \qquad \mathfrak{q} = a\sin(\lambda t + \mu), \tag{2}$$

dove:

$$\lambda = \frac{R-P}{P}\,\mathfrak{r}_0,$$

e a, μ dinotano due costanti arbitrarie determinate per le (2)'' dalle relazioni:

$$a = \mathfrak{p}_0^2 + \mathfrak{q}_0^2, \qquad a \cos \mu = \mathfrak{p}_0, \qquad a \sin \mu = \mathfrak{q}_0.$$

Le (2) sono le due equazioni integrali rimanenti, donde si ricava:

$$\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 = a^2;$$

collegando la qual relazione con (1), si riconosce che la grandezza della velocità angolare del movimento relativo in discorso si mantiene costante, e forma un angolo costante coll'asse principale d'inerzia di momento distinto, cioè coll'asse di figura dell'ellissoide d'inerzia, che, in questo caso, risulta un ellissoide di rotazione (§ 279).

Per quanto alle circostanze rimanenti, serve il procedimento generale, che sarà in seguito esposto.

§ 357. — Supponiamo ora $P > Q > R$ o $P < Q < R$. Anche in questo caso più generale è agevole trovare un sistema d'equazioni integrali delle (2, § 353).

Un'equazione integrale è quella della forza viva (§ 352), che diventa:

$$P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2 + R\mathfrak{r}^2 = H, \tag{1}$$

ove H rappresenta una costante positiva, che per le (2)'' si determina con

$$P\mathfrak{p}_0^2 + Q\mathfrak{q}_0^2 + R\mathfrak{r}_0^2 = H. \tag{1)'$$

Un'altra è fornita dal teorema della conservazione delle aree, secondo il quale è costante la grandezza della quantità di moto areale del movimento relativo in discorso rispetto al centro di massa come polo, ed è:

$$P^2\mathfrak{p}^2 + Q^2\mathfrak{q}^2 + R^2\mathfrak{r}^2 = K^2, \tag{2}$$

dove K^2 rappresenta un'altra costante positiva, determinata per le (2)'' da:

$$P^2\mathfrak{p}_0^2 + Q^2\mathfrak{q}_0^2 + R^2\mathfrak{r}_0^2 = K^2. \tag{2)'$$

Queste due equazioni si possono ricavare direttamente dalle equazioni differenziali considerate (2, § 354): la prima, moltiplicandole per $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, rispettivamente, poi sommandole, con che si ha:

$$\frac{d}{dt}\left(P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2 + R\mathfrak{r}^2\right) = 0,$$

e la seconda, moltiplicandole per $P\mathfrak{p}$, $Q\mathfrak{q}$, $R\mathfrak{r}$, poi sommandole, ciò che dà:

$$\frac{d}{dt}\left(P^2\mathfrak{p}^2 + Q^2\mathfrak{q}^2 + R^2\mathfrak{r}^2\right) = 0.$$

Analogamente, moltiplicando le tre equazioni differenziali per $\frac{\mathfrak{p}}{P}$, $\frac{\mathfrak{q}}{Q}$, $\frac{\mathfrak{r}}{R}$, e poi sommandole, troviamo:

$$\frac{d\,(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2)}{dt} = A^2\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}, \tag{3}$$

dove si è posto:

$$-\frac{(Q-R)\,(R-P)\,(P-Q)}{PQR} = A^2,$$

per modo che, stando le precedenti disuguaglianze tra le P, Q, R, A^2 è una costante data positiva.

Ora da (1) e (2), trattate come equazioni lineari rispetto a $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{r}^2$, si deduce:

$$\mathfrak{p}^2 = \frac{K^2 - RH - Q\,(Q-R)\,\mathfrak{q}^2}{P\,(P-R)}, \quad \mathfrak{r}^2 = \frac{PH - K^2 - Q\,(P-Q)\,\mathfrak{q}^2}{R\,(P-R)}$$

ove, per le suddette disuguaglianze, i rapporti di $K^2 - RH$, $PH - K^2$, $Q - R$ e $P - Q$ a $P - R$ sono positivi. E concepite introdotte queste espressioni nella (3), essa si riduce senz'altro alla forma:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \alpha\sqrt{(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{q}^2)\,(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{q}^2)},$$

ove α, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono costanti note, reali: la quale fornisce con una semplice quadratura l'equazione integrale:

$$\int_0^{\mathfrak{q}} \frac{d\mathfrak{q}}{\sqrt{(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{q}^2)\,(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{q}^2)}} = \alpha t + L, \tag{4}$$

con L indicando una nuova costante arbitraria, determinata per (2)'' da:

$$\int_0^{q_0} \frac{dq}{\sqrt{(a^2-q^2)(b^2-q^2)}} = L.$$

§ 358. — Notiamo che le costanti riescono nulle se si suppone $p_0 = q_0 = r_0 = 0$, cioè nullo l'atto di movimento relativo ad un istante; e reciprocamente che, se si suppone $H = 0$, cioè nulla la forza viva ad un istante, o $K = 0$, cioè nulla ad un istante la quantità di moto areale rispetto al centro di massa, sarà $p_0 = q_0 = r_0 = 0$, per modo che, se una delle due costanti H e K è nulla, sarà nulla la rimanente.

D'altra parte, dall'ipotesi $H = 0$ oppure $K = 0$ segue, per (1) e (2) del § precedente, $p = q = r = 0$, cioè nullo l'atto di movimento al tempo qualsivoglia t.

Quindi, se ad un istante l'atto di movimento relativo si suppone nullo, o nulla la forza viva, o nulla la quantità di moto areale rispetto al centro di massa, s'intende sempre del movimento relativo in discorso, questo movimento sarà nullo, cioè il corpo in equilibrio relativo ad una terna d'assi coll'origine nel centro di massa e orientazione costante (cfr. § 315). La qual proposizione, pei risultati dei §§ 355, 356 si applica senz'altro ai casi dei tre o di due momenti principali d'inerzia relativi al centro di massa fra loro eguali.

Osservato ciò, quest'ipotesi, nel seguito della trattazione del problema, resta esclusa.

§ 359. — Per trovare le effettive espressioni di p, q, r in funzione di t non occorre più che ricavare q dall'equazione trascendente (4) del § 357. Ma meglio ci serviremo del seguente metodo diretto.

Perciò, osserviamo, in primo luogo, che se si pone:*

$$u = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\psi}}, \qquad (1)$$

* Vedi in proposito i trattati sulle "Funzioni Ellittiche", delle quali, avvertiamo che, qui bastano in sostanza le proprietà che scaturiscono dalla definizione contenuta nelle (1), (1)'.

dove $\varkappa^2 < 1$, ne verrà ψ definito come funzione di u, per u compreso fra $-\infty$ e ∞; e posto:

$$\sin\psi = \text{sn}\, u, \qquad \cos\psi = \text{cn}\, u, \qquad \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi} = \text{dn}\, u, \quad (1)'$$

sarà:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,\text{sn}\, u}{du} &= \quad \text{cn}\, u\, \text{dn}\, u, \\ \frac{d\,\text{cn}\, u}{du} &= -\text{sn}\, u\, \text{dn}\, u, \\ \frac{d\,\text{dn}\, u}{du} &= -\varkappa^2\,\text{sn}\, u\, \text{cn}\, u, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

relazioni delle quali è evidente l'analogia colle (2, § 354).

Poniamo, guidati da questa analogia:

$$\mathfrak{p} = a\,\text{cn}\,(\lambda t + \mu), \quad \mathfrak{q} = b\,\text{sn}\,(\lambda t + \mu), \quad \mathfrak{r} = c\,\text{dn}\,(\lambda t + \mu), \quad (3)$$

intendendo che le costanti a, b, c, λ, μ e $\varkappa^2$ si debbano opportunamente determinare.

Introducendo queste relazioni nelle (2), ne viene immediatamente:

$$a\lambda = -\frac{Q-R}{P}\,bc, \quad b\lambda = \frac{R-P}{Q}\,ac, \quad \varkappa^2 c\lambda = -\frac{P-Q}{R}\,ab;$$

che sono quindi le condizioni alle quali le costanti debbono soddisfare perchè le (3) siano le soluzioni delle (2, § 354), e servono parzialmente a determinarle.

Da esse ricaviamo in primo luogo:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{P(P-R)}{Q(Q-R)}, \quad \frac{\lambda^2}{c^2} = \frac{(P-R)(Q-R)}{PQ}, \quad \frac{c^2}{a^2}\varkappa^2 = \frac{P(P-Q)}{R(Q-R)}, \quad (4)$$

in conseguenza delle quali dev'essere $P > Q > R$ o $P < Q < R$ — cioè, scelto per asse delle $\mathfrak{q}$ l'asse principale d'inerzia di momento medio — e poichè, se è $\varkappa^2 < 1$ con un'ipotesi, è $\varkappa^2 > 1$ coll'altra, si deve scegliere quella per cui è $\varkappa^2 < 1$.

Inoltre, mediante le stesse equazioni si rappresentano immediatamente b^2, $\varkappa^2$ e λ^2 in termini di a^2 e c^2; mentre queste si determinano agevolmente per mezzo delle condizioni iniziali, e sono quindi due costanti arbitrarie del sistema delle equazioni integrali.

Infatti, concependo introdotte le (3) in (1) e (2) del § 357, e poi applicate le stesse equazioni al valore del tempo definito da $\lambda t + \mu = 0$, abbiamo:

$$P^2 a^2 + R^2 c^2 = K^2, \qquad P a^2 + R c^2 = H,$$

donde:

$$a^2 = \frac{K^2 - HR}{P(P-R)}, \qquad c^2 = \frac{HP - K^2}{R(P-R)}: \tag{5}$$

e H, K sono, mediante (1)' e (2)' dello stesso §, espresse in termini di $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{r}_0$.

La terza costante arbitraria del sistema delle equazioni integrali è μ. Per determinarla in termini dei valori iniziali $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{r}_0$, e definire i segni in quanto sono vincolati, abbiamo:

$$\mathfrak{p}_0 = a \operatorname{cn} \mu, \qquad \mathfrak{q}_0 = b \operatorname{sn} \mu, \qquad \mathfrak{r}_0 = c \operatorname{dn} \mu. \tag{6}$$

Per la terza, c ha il segno di $\mathfrak{r}_0$. Attribuiamo ad a il segno di $\mathfrak{p}_0$, con che $\operatorname{cn} \mu \geqq 0$, e determiniamo poi anche di segno le b, λ, assumendo, conformemente alle (4):

$$b = \sqrt{\frac{P(P-R)}{Q(Q-R)}}\, a, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{(P-R)(Q-R)}{PQ}}\, c.$$

La prima delle stesse (4), posta per a la sua espressione in termini di $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{r}_0$ secondo le (5) e (1)', (2)' del § 357, fornisce:

$$b^2 = \mathfrak{q}_0^2 + \frac{P(P-R)}{Q(Q-R)}\, \mathfrak{p}_0^2,$$

donde $\left|\frac{\mathfrak{q}_0}{b}\right| \leqq 1$. Quindi, per la seconda delle (6), e la condizione $\operatorname{cn} \mu \geqq 0$, indicando colle parentesi il valore dell'arcoseno compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\mu = \int_0^{\left(\arcsin \frac{\mathfrak{q}_0}{b}\right)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}}, \tag{7}$$

valore reale, univocamente determinato.

§ 360. — Trovati così $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, anzi che ricorrere alle relazioni (1, § 160), ne dedurremo speditamente nel modo che segue

le espressioni degli angoli φ, f e θ in funzione del tempo t, nell'ipotesi che l'asse delle z si assuma coll'orientazione della quantità di moto areale del corpo rispetto al centro di massa.

In tale ipotesi, col precedente significato dei simboli:

$$P\mathfrak{p} = K\gamma_1, \qquad Q\mathfrak{q} = K\gamma_2, \qquad R\mathfrak{r} = K\gamma_3. \tag{1}$$

Quindi:

$$\cos f \sin\theta = \frac{P}{K}\mathfrak{p}, \quad \sin f \sin\theta = \frac{Q}{K}\mathfrak{q}, \quad \cos\theta = \frac{R}{K}\mathfrak{r};$$

donde si ha immediatamente $\cos\theta$, in seguito a che le due prime forniscono f; e notiamo come si abbia:

$$\tan f = \frac{Q}{P}\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}.$$

È poi:

$$\tan\varphi = \frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

donde:

$$d\varphi = \frac{\alpha_3\, d\beta_3 - \beta_3\, d\alpha_3}{\alpha^2_3 + \beta^2_3} = \frac{\alpha_3\, d\beta_3 - \beta_3\, d\alpha_3}{1 - \gamma^2_3};$$

e poichè (1, § 159):

$$d\alpha_3 = (\alpha_1\mathfrak{q} - \alpha_2\mathfrak{p})\,dt, \qquad d\beta_3 = (\beta_1\mathfrak{q} - \beta_2\mathfrak{p})\,dt$$

e:

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \qquad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3,$$

anche:

$$d\varphi = \frac{\gamma_1\mathfrak{p} + \gamma_2\mathfrak{q}}{\gamma^2_1 + \gamma^2_2}\,dt;$$

introducendo nella qual relazione le (1), e integrando:

$$\varphi = K\int\frac{P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2}{P^2\mathfrak{p}^2 + Q^2\mathfrak{q}^2}\,dt.$$

§ 361. — Il precedente § si applica senz'altro ai casi $P = Q = R$, e $P = Q$, già considerati ai §§ 355, 356.

Nel primo caso, tenendo calcolo dei risultati del § 355, se ne ricava:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t, \qquad \theta = \theta_0, \qquad f = f_0,$$

dove:

$$\omega_0 = \sqrt{\mathfrak{p}_0^2 + \mathfrak{q}_0^2 + \mathfrak{r}_0^2} = \frac{K}{P};$$

per modo che, secondo quanto abbiamo già conchiuso, il movimento è rotatorio uniforme, e la velocità angolare risulta orientata come la quantità di moto areale rispetto al centro di massa, e di grandezza $\frac{K}{P}$.

Nel secondo caso troviamo agevolmente:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{K}{P} t, \qquad \theta = \theta_0, \qquad f = f_0 + \lambda t.$$

Quindi, l'asse di figura dell'ellissoide d'inerzia relativo al centro di massa (col supposto senso, asse ζ), ruota uniformemente, con velocità angolare di grandezza $\frac{K}{P}$, in senso positivo, intorno all'asse orientato come la quantità di moto areale rispetto al centro di massa, passante pel punto medesimo (asse z): questo per le due prime equazioni. Per la terza poi, il movimento del corpo relativo ad una ternà d'assi invariabilmente unita a questo piano, è un movimento rotatorio uniforme intorno all'asse ζ come asse di rotazione, con velocità angolare di misura $-\lambda$. E con ciò il movimento è completamente descritto.

Abbiamo già constatato come la grandezza, ω_0, della velocità angolare dell'atto di movimento ad ogni istante sia costante, e l'asse istantaneo di rotazione formi un angolo costante coll'asse di figura dell'ellissoide d'inerzia relativo al centro di massa; donde segue che il luogo delle rette del corpo che fungono successivamente da asse istantaneo formano una superficie conica circolare col vertice nel centro di massa, e lo stesso asse di figura del suddetto ellissoide d'inerzia. Essendo poi, nelle presenti ipotesi:

$$\mathfrak{p} = \frac{K \sin \theta_0}{P} \cos f, \qquad \mathfrak{q} = \frac{K \sin \theta_0}{P} \sin f,$$

e, inteso che θ_0 sia la misura dell'angolo degli assi ζ e z, sin θ_0 positivo, si vede che l'asse istantaneo di rotazione sarà ad ogni istante nel semipiano terminato all'asse ζ contenente l'asse delle z

positive, costantemente compreso o no nell'angolo dei due assi medesimi; e per conseguenza esso ruota intorno all'asse delle $\mathfrak{z}$, in senso positivo, con velocità angolare di grandezza $\frac{K}{P}$. Collegando il qual risultato col precedente, si conclude che il movimento in discorso si può definire come tale che una superficie conica circolare col vertice nel centro di massa e l'asse di figura comune col relativo ellissoide d'inerzia rotola uniformemente senza strisciare sopra una superficie conica circolare, col vertice egualmente nel centro di massa, fissa.

Gli elementi di questo movimento si deducono agevolmente, mediante i precedenti risultati, dai dati iniziali. Supponiamo, per fissar le idee, θ_0 compreso fra o e $\frac{\pi}{2}$, ed r_0 positivo, per modo che $\left(\operatorname{arcos}\frac{r_0}{\omega_0}\right)$, così indicando il valor principale, compreso fra gli stessi limiti; chè, in caso contrario, si vede come giovandosi degli angoli supplementari, si procederà similmente. La superficie conica fissa ha l'asse orientato come la quantità di moto areale rispetto al centro di massa, e l'angolo formato con esso dalle generatrici ha per grandezza $\pm\left(\theta_0-\left(\operatorname{arcos}\frac{r_0}{\omega_0}\right)\right)$, dove va preso + o — secondo che l'asse istantaneo di rotazione cade nell'angolo dei due assi $\mathfrak{z}$ e z, o fuori di esso. La superficie conica mobile, alla sua volta, ha per asse l'asse $\mathfrak{z}$, e l'angolo formato con esso dalle generatrici è $\left(\operatorname{arcos}\frac{r_0}{\omega_0}\right)$. La generatrice di contatto ruota sulla prima superficie conica in senso positivo rispetto all'asse z con velocità angolare di grandezza $\frac{K}{P}$; sulla seconda, con velocità angolare di grandezza λ, in senso negativo o positivo rispetto all'asse $\mathfrak{z}$, secondo che $-\lambda$ è positivo o negativo. Ora si verifica subito che i raggi delle due superficie coniche terminati ad uno stesso punto hanno grandezze inversamente proporzionali a quelle, oltre di che le superficie medesime si toccano esternamente, o la prima internamente alla seconda, secondo che è $-\lambda$, cioè $P-R$ (§ 356), positivo o negativo.

Si ha infatti:

$$\sin\left(\arcos \frac{\mathfrak{r}_0}{\omega_0}\right) = \frac{a}{\omega_0}, \quad \sin\left(\theta_0 - \left(\arcos \frac{\mathfrak{r}_0}{\omega_0}\right)\right) = -\frac{a}{\omega_0}\frac{P}{K}\lambda.$$

§ 362. — Sia per $t = o$ asse istantaneo dell'atto di movimento rotatorio (intendiamo sempre il movimento relativo, ossia il componente polare) l'asse principale d'inerzia corrispondente al centro di massa, di massimo o minimo momento. Posto, conformemente a ciò, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0 = o$, $\mathfrak{r}_0 \gtrless o$, le (5, § 359) danno:

$$a = o, \qquad c = \mathfrak{r}_0.$$

Ne viene che, col tendere di $\mathfrak{p}_0$ e $\mathfrak{q}_0$ a zero, cioè coll'avvicinarsi infinitamente l'asse istantaneo di rotazione all'origine dei tempi all'asse principale d'inerzia di momento massimo o minimo, a e c avranno per limite rispettivamente zero e $\mathfrak{r}_0 \gtrless o$, e per le (4, § 359) b e $\varkappa$ tenderanno a zero, mentre, per la terza delle (6, § 359), sarà zero anche il limite di μ. Dallo svanire di a e b segue, per le (3, § 359) e le (1, § 360), che, qualunque sia il valore del tempo t, svaniranno, $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$, γ_1 e γ_2: cioè il limite dell'asse istantaneo *ad ogni istante* sarà il supposto asse principale d'inerzia. E per conseguenza, nella suddetta ipotesi che asse istantaneo iniziale sia questo asse principale, lo sarà ad ogni istante, e si manterrà fisso (rispetto, s'intende, al movimento relativo) e il movimento (relativo) sarà rotatorio intorno all'asse medesimo. Che se l'asse istantaneo iniziale sarà abbastanza poco discosto dall'asse principale in discorso, esso non ne devierà fuori di certi termini in tutto il corso del movimento. In questo caso, con approssimazione tanto maggiore quanto più piccola è la deviazione iniziale, si avrà sensibilmente:

$$\mathfrak{p} = a\cos\lambda t, \qquad \mathfrak{q} = b\sin\lambda t, \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0,$$
$$\gamma_1 = \frac{aP}{K}\cos\lambda t, \qquad \gamma_2 = \frac{bQ}{K}\sin\lambda t, \qquad \gamma_3 = \frac{R}{K}w_0.$$

Supponiamo ora che l'asse istantaneo iniziale sia l'asse principale d'inerzia di momento medio; cioè $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{r}_0 = o$, $\mathfrak{q}_0 \gtrless o$. Per le (5, § 359):

$$a^2 = \frac{Q}{P}\frac{Q-R}{P-R}\mathfrak{q}_0^2, \qquad c^2 = \frac{Q}{R}\frac{P-Q}{P-R}\mathfrak{q}_0^2.$$

Quindi per le (4, § 359):

$$b = \mathfrak{q}_0, \qquad \lambda^2 = \frac{(P-Q)(Q-R)}{PR}\,\mathfrak{q}_0^2, \qquad \varkappa^2 = 1.$$

Ne viene, con tanto maggior approssimazione quanto più $\mathfrak{p}_0$ e $\mathfrak{r}_0$ sono vicini a zero:

$$\mathfrak{p} = \sqrt{\frac{Q}{P}\,\frac{Q-R}{P-R}}\,\mathfrak{q}_0\,\frac{1}{\cosh(\lambda t + \mu)}, \qquad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \tanh(\lambda t + \mu),$$

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\frac{Q}{P}\,\frac{P-Q}{P-R}}\,\mathfrak{q}_0\,\frac{1}{\cosh(\lambda t + \mu)},$$

mentre, per (7, § 359):

$$\lim_{x^2 > 1} \mu = \lim_{x^2 > 1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = -\infty.$$

Si conclude, tenendo calcolo delle (1, § 360), che nella suddetta ipotesi, essendo $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} = 0$, donde $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$, il movimento sarà, come nel precedente caso, rotatorio uniforme. Ma poichè, comunque grande si supponga $|\mu|$, purchè finito, cioè $\mathfrak{p}_0$ e $\mathfrak{r}_0$ prossimi a zero, vi sarà un valor del tempo tale che $\lambda t + \mu = 0$, e $\cosh 0 = 1$, non si verificherà la circostanza che $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{r}$, γ_1 e γ_3 non si scostino da zero oltre un dato termine arbitrariamente ristretto, pur di supporre $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{r}_0$ abbastanza poco diversi da zero; cioè non ha luogo la proprietà che l'asse istantaneo di rotazione non devii oltre un termine assegnabile, piccolo a piacere, dall'asse principale d'inerzia di momento medio, pur di supporlo abbastanza poco discosto da esso all'istante iniziale.

In pratica la differenza dei due casi si rivela col fatto che, procurando d'imprimere un moto rotatorio intorno ad un asse principale d'inerzia relativo al centro di massa, questo si mantiene sensibilmente nel primo caso, e nel secondo più o meno rapidamente ne devia. E conformemente a ciò, con termini analoghi a quelli adoperati per distinguere l'equilibrio dal medesimo punto di vista (§ 324), la rotazione si dice “ stabile „ intorno all'asse di momento massimo o minimo, e “ instabile „ intorno all'asse di momento medio.

§ 363. *Teorema di Poinsot.* — L'integrale della forza viva:

$$P\mathfrak{p}^2 + Q\mathfrak{q}^2 + R\mathfrak{r}^2 = H, \qquad (1)$$

e gl'integrali delle aree:

$$\left.\begin{aligned} P\mathfrak{p}\,\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\,\alpha_2 + R\mathfrak{r}\,\alpha_3 &= A_1 \\ P\mathfrak{p}\,\beta_1 + Q\mathfrak{q}\,\beta_2 + R\mathfrak{r}\,\beta_3 &= A_2 \\ P\mathfrak{p}\,\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\,\gamma_2 + R\mathfrak{r}\,\gamma_3 &= A_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

del considerato movimento d'inerzia d'un corpo rigido relativo ad una terna d'assi coll'origine nel centro di massa e orientazione costante, si traducono, collegati insieme, in una notevole rappresentazione geometrica del movimento medesimo.

Poniamo:

$$\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{H}} = \mathfrak{x}', \qquad \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{H}} = \mathfrak{y}', \qquad \frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{H}} = \mathfrak{z}', \qquad (3)$$

dove, per fissare le idee, il segno del radicale sia il positivo.

Concepite $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ come coordinate d'un punto rispetto agli assi mobili, cioè agli assi principali d'inerzia del corpo corrispondenti al centro di massa, questo sarà un punto variabile col tempo t, che, essendo per (1):

$$P\mathfrak{x}'^2 + Q\mathfrak{y}'^2 + R\mathfrak{z}'^2 = 1, \qquad (1)'$$

apparterrà ad ogni istante all'ellissoide d'inerzia corrispondente allo stesso centro di massa; e poichè, d'altra parte:

$$\frac{\mathfrak{x}'}{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{y}'}{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{z}'}{\mathfrak{r}},$$

si troverà sull'asse istantaneo di rotazione al supposto istante: per modo che sarà, in conclusione, ad ogni istante, uno dei due punti d'intersezione di detto ellissoide d'inerzia coll'asse istantaneo di rotazione.

I coseni di direzione della normale all'ellissoide in questo punto *rispetto agli assi mobili* sono, per (1)' e (3):

$$\frac{P\mathfrak{p}}{K}, \quad \frac{Q\mathfrak{q}}{K}, \quad \frac{R\mathfrak{r}}{K}.$$

Quindi, per le (2), i coseni di direzione della normale stessa rispetto agli assi fissi avranno il valore invariabile di quelli

della quantità di moto areale rispetto al centro di massa, ossia la normale avrà la direzione di questo vettore invariabile del movimento.

D'altra parte:

$$P^2 \mathfrak{p}^2 + Q^2 \mathfrak{q}^2 + R^2 \mathfrak{r}^2 = K^2,$$

ossia:

$$P^2 \mathfrak{x}'^2 + Q^2 \mathfrak{y}'^2 + R^2 \mathfrak{z}'^2 = \frac{K^2}{H},$$

esprime che anche la distanza del centro dell'ellissoide dal pian tangente nel punto in discorso è costante.

Concludiamo quindi che la posizione del pian tangente è invariabile rispetto ad una terna d'assi aventi per origine il centro dell'ellissoide, cioè il centro di massa, e orientazione fissa: la quale sarà quella d'uno dei due piani invariabilmente uniti con questi assi che, ad un certo istante, per esempio all'istante iniziale, toccano l'ellissoide, e sono perpendicolari alla quantità di moto areale del movimento relativo agli assi rispetto al centro di massa.

Quindi il movimento in discorso è tale che l'ellissoide d'inerzia corrispondente al centro di massa del corpo tocca costantemente un piano fisso relativamente agli assi di riferimento, con un punto la cui velocità (appartenendo all'asse istantaneo di rotazione) è nulla: e cioè " rotola senza strisciare „ sul piano medesimo.

Notiamo che, per le (3), si ha:

$$\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2 = H(\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 + \mathfrak{z}'^2);$$

esprimente che la velocità angolare del movimento medesimo ad ogni istante è proporzionale alla distanza del punto di contatto dell'ellissoide col piano invariabile dal centro.

Movimento dei gravi.

§ 364. — Abbiamo determinato a suo luogo il movimento del centro di massa d'un grave qualsivoglia. Supposta poi la rigidità del corpo, e trascurata come insensibile l'accelerazione

centrifuga composta (§ 344), per modo che la forza motrice del movimento si riduca al peso, siccome questo ha per punto d'applicazione il centro di massa, concludiamo senz'altro che il movimento del grave relativo ad una terna d'assi coll'origine nel centro di massa e orientazione fissa, ossia il componente polare rispetto al centro di massa del movimento medesimo, è determinato dalle equazioni differenziali (2, § 354), che reggono il movimento relativo analogo per inerzia, e coincide con questo movimento (cfr. § 346, § 315).

§ 365. — Notiamo la forma che assume nel presente caso il teorema della conservazione dell'energia. Pel § 282, sarà:

$$T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 + \mathrm{T},$$

dove T indica la misura della forza viva costante corrispondente al componente polare, v quella della velocità del centro di massa al supposto tempo *t*, ed *m* la grandezza della massa del mobile. D'altra parte, preso il posto iniziale del centro di massa per origine, e orientato l'asse delle *z* come il filo a piombo, si ha (§ 344):

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2 + 2gz.$$

Quindi:

$$T - T_0 = mgz,$$

ossia:

$$T - mgz = T_0;$$

come immediatamente si può dedurre dalla circostanza che mgz è potenziale del sistema di forze (§§ 293, 336). Indichiamo con z_1 il più gran valore che acquista z nel corso del movimento. L'energia potenziale al tempo *t* avrà per misura $mg(z_1 - z)$, cioè il prodotto delle grandezze del peso del corpo e dell'altezza del piano perpendicolare al filo a piombo in cui il centro di massa si trova al tempo *t* sul piano analogo più basso che raggiunge nel corso del movimento (cfr. § 285).

Movimento d'un sistema di croste sferiche, esterne l'una all'altra, mutuamente gravitanti.

§ 366. — Consideriamo, per discorrere d'un altro esempio fra i più interessanti, il movimento determinato dalla mutua gravitazione newtoniana di n corpi, che supponiamo *a priori* altrettante croste sferiche a strati omogenei, invariabili, ed esterne l'una all'altra.

Indichiamo con x_i, y_i, z_i e m_i le coordinate del centro (che sarà il centro di massa) e la grandezza della massa d'uno qualunque degli n corpi: con x_j, y_j, z_j e m_j le coordinate del centro e la grandezza della massa d'uno qualsivoglia dei rimanenti: con r_{ij} la mutua distanza dei centri: infine con X_i, Y_i, Z_i e M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} le componenti della forza motrice e del risultante dei momenti delle forze esterne applicate ai punti del corpo rispetto all'origine degli assi coordinati, pel primo corpo.

Pel § 335:

$$\left.\begin{aligned}
X_i &= \varkappa^2 m_i \Sigma_j\, m_j \frac{x_i - x_j}{r^3_{ij}}, \\
Y_i &= \varkappa^2 m_i \Sigma_j\, m_j \frac{y_i - y_j}{r^3_{ij}}, \\
Z_i &= \varkappa^2 m_i \Sigma_j\, m_j \frac{z_i - z_j}{r^3_{ij}}. \\
M_{ix} &= \varkappa^2 m_i \Sigma_j\, m_j \frac{y_i z_j - z_i y_j}{r^3_{ij}}, \\
M_{iy} &= \varkappa^2 m_i \Sigma_j\, m_j \frac{z_i x_j - x_i z_j}{r^3_{ij}}, \\
M_{iz} &= \varkappa^2 m_i \Sigma_j\, m_j \frac{x_i y_j - y_i x_j}{r^3_{ij}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Quindi le (2, § 350), applicate al primo corpo, si possono scrivere così:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \varkappa^2 \Sigma_j\, m_j \frac{x_i - x_j}{r^3_{ij}}, \\
\frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \varkappa^2 \Sigma_j\, m_j \frac{y_i - y_j}{r^3_{ij}}, \\
\frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \varkappa^2 \Sigma_j\, m_j \frac{z_i - z_j}{r^3_{ij}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

E poichè $i = 1, 2, .. n$, si hanno $3n$ equazioni differenziali alle derivate ordinarie del 2.° ordine per determinare in funzione di t le $3n$ incognite x_i, y_i, z_i.

Concepiamo fatta questa determinazione; sarà con ciò trovato il movimento del centro di massa d'ogni corpo; e non occorrerà più che conoscere il componente polare del movimento di ciascheduno rispetto ad esso.

Ora, nell'ipotesi della gravitazione universale, il risultante dei momenti del sistema di forze applicato ai punti d'una crosta sferica a strati omogenei rispetto al suo centro è nullo, come emerge sia dalla formazione diretta mediante le (1), sia dalla considerazione che le parallele alle forze acceleratrici dipendenti da ciascun'altra crosta, descritte pei punti corrispondenti, convergono al centro di questa crosta, e la risultante è parallela alla congiungente i centri di questa e della crosta considerata, per modo che il centro della crosta in discorso è punto d'applicazione della risultante.

Ne viene che il suddetto componente polare coinciderà col componente polare rispetto al centro di massa del movimento per inerzia determinato dalle stesse condizioni iniziali; e sarà propriamente un movimento rotatorio uniforme, poichè l'ellissoide d'inerzia relativo al centro di massa di una crosta sferica a strati omogenei si riduce ad una sfera (§ 355).

Problema degli *n* corpi.

§ 367. — L'integrazione delle equazioni differenziali (2) del § precedente costituisce il così detto " problema degli n corpi ". Si verificano in questo caso il teorema della conservazione del movimento del centro di massa, in conseguenza del quale le equazioni si possono egualmente riferire al movimento relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio coll'origine nel centro di massa del sistema, e quelli della conservazione delle aree e della forza viva: ciò che fornisce in tutto dieci equazioni integrali delle $6n$ che formano il sistema integrale completo (cfr. § 353). Questo non fu finora trovato che nel caso di due

corpi, nel quale è facile determinare le due equazioni integrali rimanenti. Il " problema dei tre corpi „ fu oggetto di molte ricerche, che condussero ad interessanti risultati, ma non è stato completamente risoluto; nè è presumibilmente risolubile sotto la condizione che tutte le equazioni integrali si ottengano eguagliando a zero funzioni *usuali* delle $6n$ incognite. *

§ 368. — Consideriamo il caso di due corpi, e indichiamo con m, m' le grandezze della massa, con x, y, z e x', y', z' le coordinate dei centri di massa, con r la loro mutua distanza al tempo t. Le equazioni (2, § 366) si riducono alle:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \varkappa^2 m' \frac{x'-x}{r^3}, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \varkappa^2 m' \frac{y'-y}{r^3}, & \frac{d^2z}{dt^2} &= \varkappa^2 m' \frac{z'-z}{r^3}, \\ \frac{d^2x'}{dt^2} &= \varkappa^2 m \frac{x-x'}{r^3}, & \frac{d^2y'}{dt^2} &= \varkappa^2 m \frac{y-y'}{r^3}, & \frac{d^2z'}{dt^2} &= \varkappa^2 m \frac{z-z'}{r^3}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Di qui segue immediatamente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2(x-x')}{dt^2} &= \varkappa^2 (m+m') \frac{x'-x}{r^3}, \\ \frac{d^2(y-y')}{dt^2} &= \varkappa^2 (m+m') \frac{y'-y}{r^3}, \\ \frac{d^2(z-z')}{dt^2} &= \varkappa^2 (m+m') \frac{z'-z}{r^3}; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

le quali esprimono l'importante proposizione che il moto del centro di ciascun corpo relativo ad una terna d'assi in movimento traslatorio coll'origine nel centro dell'altro è quello di un punto la cui accelerazione è costantemente volta verso questo punto, e la grandezza è:

$$\varkappa^2 \frac{(m+m')}{r^2},$$

cioè inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei due punti. Questo è il movimento che, sotto il nome di " centrale „ abbiamo indagato nei §§ 197, 200.

* Come non è risolubile l'equazione del 5.° grado sotto la condizione che la formola di risoluzione contenga i coefficienti assoggettati alle sole operazioni algebriche, e non è possibile la quadratura del circolo sotto quella che la costruzione non implichi che la retta ed il cerchio.

Ne viene, indicando con $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ tre funzioni del tempo t, note per quell'indagine:

$$\begin{aligned} x - x' &= (m + m')\,\varphi(t), \\ y - y' &= (m + m')\,\chi(t), \\ z - z' &= (m + m')\,\psi(t); \end{aligned} \tag{3}$$

le quali forniscono senz'altro il suddetto movimento relativo, e, insieme colle tre, che se ne deducono derivando rispetto a t, rappresentano sei equazioni integrali del sistema (1).

Le rimanenti sei sono date dal teorema della conservazione del movimento del centro di massa (dalle (1), sommandole membro a membro, immediatamente deducibile), e cioè sono:

$$\begin{aligned} \frac{mx + m'x'}{m + m'} &= a + \alpha t, \\ \frac{my + m'y'}{m + m'} &= b + \beta t, \\ \frac{mz + m'z'}{m + m'} &= c + \gamma t, \end{aligned} \tag{4}$$

e le tre che se ne deducono derivando per rispetto a t.

Così il problema è completamente risoluto. Dalle (3) e (4), indicando con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ le coordinate del centro di massa della coppia dei due corpi, per modo che:

$$\bar{x} = a + \alpha t, \qquad \bar{y} = b + \beta t, \qquad \bar{z} = c + \gamma t,$$

abbiamo immediatamente:

$$\begin{aligned} x - \bar{x} &= m'\,\varphi(t), & y - \bar{y} &= m'\,\chi(t), & z - \bar{z} &= m'\,\psi(t), \\ x' - \bar{x} &= -m\,\varphi(t), & y' - \bar{y} &= -m\,\chi(t), & z' - \bar{z} &= -m\,\psi(t). \end{aligned}$$

E queste equazioni forniscono senz'altro il movimento assoluto: mentre, confrontate colle (3), mettono in evidenza la semplice relazione esistente fra i movimenti del centro di massa d'un corpo relativi a due terne d'assi in moto traslatorio, coll'origine, l'una nel centro di massa dell'altro corpo, e l'altra in quello della coppia dei due corpi.

È ovvia l'applicazione di questa teoria al movimento dei corpi celesti. Noi vediamo che le leggi di *Kepler* (che si riferiscono appunto al moto relativo ad una terna d'assi d'orienta-

zione fissa, coll'origine nel centro del Sole) corrispondono all'ipotesi di due soli corpi, che siano croste sferiche a strati omogenei, e rigidi. Effettivamente, stante la preponderante massa del Sole, il moto di ciascun pianeta riesce approssimativamente come se fosse solo; ma sensibili all'esperienza sono le deviazioni dalle leggi di *Kepler*: le così dette "perturbazioni". Queste sono oggetto di calcoli spettanti più particolarmente alla Meccanica Celeste; e l'accordo che si riconosce fra l'osservazione e la teoria fondata sulla legge di *Newton* conferma nel più chiaro modo la legge medesima.

Movimento di un gruppo planetario.

§ 369. — Movimento di un gruppo planetario chiameremo il movimento conforme alla legge della gravitazione universale di un gruppo di croste sferiche a strati omogenei, in presenza d'un'altra — crosta esterna — nelle ipotesi che le croste non si comprendano, e inoltre:

1.°) che il rapporto della massa del gruppo alla massa della crosta esterna sia così piccolo, da poter sensibilmente confondere col centro della crosta esterna il comun centro di massa del sistema formato dal gruppo e dalla crosta esterna, e supporre per conseguenza il centro di questa in movimento uniforme rettilineo, o, se capita, fisso;

2.°) che sia così piccolo il rapporto della mutua distanza del centro di ciascuna crosta del gruppo e del centro di massa del gruppo medesimo alla mutua distanza di questo e del centro della crosta esterna, così da poter sensibilmente trascurare, nel calcolo delle forze, l'aggiunta delle sue potenze superiori alla prima.

Indichino in queste ipotesi $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ e $\bar{x}+\xi_i$, $\bar{y}+\eta_i$, $\bar{z}+\zeta_i$ le coordinate del centro di massa e della crosta qualunque del gruppo rispetto ad una terna d'assi avente per origine il centro della crosta esterna, per modo che ξ_i, η_i, ζ_i siano le coordinate del centro della crosta suddetta del gruppo rispetto ad una terna parallela, coll'origine nel centro di massa del gruppo; M, m e m_i

le grandezze della massa della crosta esterna, del gruppo, e della crosta i^{ma} del gruppo precedentemente considerata; $\bar{r}$ e α, β, γ quella della mutua distanza del centro di massa del gruppo e del centro della crosta esterna, e i coseni di direzione del raggio spiccato da questo punto a quello, per modo che:

$$\alpha = \frac{\bar{x}}{\bar{r}}, \qquad \beta = \frac{\bar{y}}{\bar{r}}, \qquad \gamma = \frac{\bar{z}}{\bar{r}},$$
$$\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}.$$

Avremo sensibilmente:

$$\sqrt{(\bar{x} + \xi_i)^2 + (\bar{y} + \eta_i)^2 + (\bar{z} + \zeta_i)^2} = \bar{r}\sqrt{1 + 2\frac{\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i}{\bar{r}}}$$
$$= \bar{r} + \alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i,$$
$$\frac{\bar{x} + \xi_i}{\bar{r} + \alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i} = \left(\alpha + \frac{\xi_i}{\bar{r}}\right)\left(1 - \frac{\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i}{\bar{r}}\right).$$

Quindi, posto per un momento:

$$\frac{x^2}{r^2} = \mathbf{R}(r), \tag{1}$$

colla stessa approssimazione, per la grandezza della forza motrice della crosta i^{ma} concepita isolata colla crosta esterna:

$$m_i M \left(\mathbf{R}(\bar{r}) + \mathbf{R}'(\bar{r})(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)\right),$$

e per le sue componenti;

$$-m_i M \left(\mathbf{R}(\bar{r})\left(\alpha + \frac{\xi_i}{\bar{r}}\right) - \mathbf{S}(\bar{r})(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)\alpha\right)$$
$$-m_i M \left(\mathbf{R}(\bar{r})\left(\beta + \frac{\eta_i}{\bar{r}}\right) - \mathbf{S}(\bar{r})(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)\beta\right)$$
$$-m_i M \left(\mathbf{R}(\bar{r})\left(\gamma + \frac{\zeta_i}{\bar{r}}\right) - \mathbf{S}(\bar{r})(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)\gamma\right)$$

dove:

$$\mathbf{S}(r) = \frac{1}{r}\mathbf{R}(r) - \mathbf{R}'(r).$$

E riuscendo, per (1):

$$\mathrm{S}(r) = \frac{3\varkappa^2}{r^3},$$

si conclude per le componenti medesime:

$$\left.\begin{aligned}
&-\varkappa^2 m_i M\left(\frac{1}{r^2}\alpha + \frac{1}{r^3}\xi_i - \frac{3(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)}{r^3}\alpha\right),\\
&-\varkappa^2 m_i M\left(\frac{1}{r^2}\beta + \frac{1}{r^3}\eta_i - \frac{3(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)}{r^3}\beta\right),\\
&-\varkappa^2 m_i M\left(\frac{1}{r^2}\gamma + \frac{1}{r^3}\zeta - \frac{3(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)}{r^3}\gamma\right).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

§ 370. — Si ha, intendendo che la sommatoria abbracci tutte le croste sferiche del gruppo:

$$\Sigma\, m_i = m, \quad \Sigma\, m_i\,\xi_i = \Sigma\, m_i\,\eta_i = \Sigma\, m_i\,\zeta_i = 0.$$

E per conseguenza le componenti della forza motrice del gruppo risultano:

$$-\frac{\varkappa^2 m M}{r^2}\alpha, \qquad -\frac{\varkappa^2 m M}{r^2}\beta, \qquad -\frac{\varkappa^2 m M}{r^2}\gamma.$$

Donde scaturisce che il movimento del centro di massa del gruppo è quello del centro d'una crosta sferica a strati omogenei avente la massa totale del gruppo, isolata colla crosta esterna; e perciò indipendente dal movimento delle singole croste, e puramente determinato dalle sue condizioni iniziali, dalle quali è senz'altro deducibile.

§ 371. — In secondo luogo, per le stesse (2, § 369) saranno:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\varkappa^2 m_i M}{r^3}\xi_i + \frac{3\varkappa^2 m_i M}{r^3}\varpi_i\,\alpha,\\
&-\frac{\varkappa^2 m_i M}{r^3}\eta_i + \frac{3\varkappa^2 m_i M}{r^3}\varpi_i\,\beta,\\
&-\frac{\varkappa^2 m_i M}{r^3}\zeta_i + \frac{3\varkappa^2 m_i M}{r^3}\varpi_i\,\gamma,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\varpi_i = \alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i$$

le componenti della risultante del sistema di forze applicate alla crosta i^{ma}, determinato dalle forze acceleratrici esterne (rispetto

al gruppo) corrispondenti al movimento relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio coll'origine nel centro di massa del gruppo (§ 311): ciò che chiameremo la forza motrice esterna (rispetto al gruppo) della crosta i^{ma}, corrispondente allo stesso movimento relativo. La qual forza emerge composta delle due le cui componenti sono i termini in colonna; l'una orientata inversamente al raggio spiccato dal centro di massa del gruppo al centro della crosta considerata; l'altra orientata come la projezione del raggio descritto dal centro di massa del gruppo al centro della crosta considerata sul raggio descritto a detto centro di massa dal centro della crosta esterna.

§ 372. — Si conclude che le equazioni del movimento dei centri delle singole croste componenti il gruppo relativo ad una terna d'assi in movimento traslatorio coll'origine nel centro di massa, saranno:

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \varkappa^2 \Sigma_j\, m_j \frac{\xi_i - \xi_j}{r_{ij}^3} - \frac{\varkappa^2 M}{\bar{r}^3} (\xi_i - 3\bar{\omega}_i \alpha),$$

$$\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \varkappa^2 \Sigma_j\, m_j \frac{\eta_i - \eta_j}{r_{ij}^3} - \frac{\varkappa^2 M}{\bar{r}^3} (\eta_i - 3\bar{\omega}_i \beta),$$

$$\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \varkappa^2 \Sigma_j\, m_j \frac{\zeta_i - \zeta_j}{r_{ij}^3} - \frac{\varkappa^2 M}{\bar{r}^3} (\zeta_i - 3\bar{\omega}_i \gamma),$$

$$(i = 1, 2, \ldots. n)$$

dove $\bar{r}$ e α, β, γ si debbono considerare come funzioni del tempo t, trovate preventivamente colla determinazione del movimento del centro di massa del gruppo mediante il § 370.

È manifesta la parentela di queste equazioni con quelle degli n corpi (§ 367). La forza particolare del caso in discorso, che abbiamo esaminato nel precedente § 371, si chiama per ogni corpo del gruppo la "forza perturbatrice" proveniente dalla crosta esterna.

Questo studio serve di fondamento al problema del movimento del sistema formato da un pianeta e suoi satelliti. Si vede intanto come, essendo sempre assai piccolo il rapporto delle masse dei satelliti a quella del pianeta, e perciò sensibilmente coincidente col centro di massa del sistema il centro del pianeta, questo si moverà, secondo le leggi di *Kepler*, come se i satelliti

non esistessero. Mentre, supposto, per esempio, un solo satellite, il movimento del suo centro relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio coll'origine nel centro del pianeta devierà dalle leggi di *Kepler* in conseguenza della forza perturbatrice del Sole. Ciò che si verifica nel movimento della Luna, e costituisce i fenomeni astronomici che formano l'oggetto della " Teoria della Luna ".

S'intende poi il possibile dislocamento delle parti di un gruppo, che, da gran lontananza, si vada accostando al Sole; chè la forza perturbatrice di questo, in parti diversamente poste, può riuscire di contrario senso, così da tradursi in un'*azione divellente*. E questo è il principio dinamico della teoria di *Schiaparelli* della disgregazione delle comete, e conseguente formazione del corteggio di meteoriti, che, scoperse l'illustre astronomo, accompagna taluna di esse.

Sul movimento completo d'un pianeta.

§ 373. — Manteniamo le ipotesi dei precedenti §§, solo sostituendo ad una delle croste sferiche del gruppo planetario un solido qualsivoglia, che chiameremo il Pianeta, mentre le singole croste del gruppo si chiameranno i satelliti, e la crosta esterna, il Sole; oltre di che supponiamo che sia piccolissimo il rapporto del raggio d'una sfera che s'immagini contenere il pianeta alla distanza del suo centro dal centro del Sole e d'ogni satellite, e il rapporto della massa d'ogni satellite a quella del pianeta, così che il centro di massa del pianeta coincida sensibilmente con quello del gruppo planetario.

Le (2, § 369) dove si faccia $m_i = 1$, e s'intenda sostituito al centro di massa della crosta i^{ma} di quel movimento il punto qualunque del Pianeta, e alla crosta esterna il Sole, o uno qualunque dei satelliti, si applicano senz'altro alla forza acceleratrice esterna in questo punto del Pianeta, dipendente dal Sole o dal satellite considerato.

Ne viene che la forza motrice del Pianeta e d'ogni satellite sarà la stessa come nel caso precedentemente trattato, per modo

che potremo supporre determinato conformemente alle leggi di *Kepler* (o dei due corpi) il movimento del centro di massa del gruppo planetario, o sensibilmente del centro di massa del Pianeta, e mediante le equazioni del § 372 il movimento del centro d'ogni satellite relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio coll'origine nel centro di massa del Pianeta.

Formando poi, colle stesse (2, § 369), le componenti del risultante dei momenti del sistema di forze corrispondente, rispetto al centro di massa del Pianeta, e deducendone le espressioni nell'ipotesi che la terna degli assi coordinati sia formata cogli assi principali d'inerzia del Pianeta relativi al centro di massa — al qual fine, basterà supporre, per un momento, che l'orientazione delle due terne coincidano — si trova agevolmente:

$$\frac{3\varkappa^2 M}{\bar{r}^3}(Q-R)\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}, \qquad \frac{3\varkappa^2 M}{\bar{r}^3}(R-P)\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}, \qquad \frac{3\varkappa^2 M}{\bar{r}^3}(P-Q)\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$$

(" formole d'*Euler* "); dove:

$$\mathfrak{a} = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1, \quad \mathfrak{b} = \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2, \quad \mathfrak{c} = \alpha\alpha_3 + \beta\beta_3 + \gamma\gamma_3,$$

e M, $\bar{r}$ e α, β, γ si riferiscono al Sole o al satellite considerato, mentre i rimanenti simboli si riferiscono al Pianeta, col significato precedentemente stabilito.

Poniamo:

$$\mathfrak{M}_\xi = 3\varkappa^2 (Q-R)\,\Sigma\,\frac{M\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}{\bar{r}^3},$$

$$\mathfrak{M}_\eta = 3\varkappa^2 (R-P)\,\Sigma\,\frac{M\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}}{\bar{r}^3},$$

$$\mathfrak{M}_\zeta = 3\varkappa^2 (P-Q)\,\Sigma\,\frac{M\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\bar{r}^3},$$

dove la sommatoria abbraccia il Sole e i singoli satelliti.

Introducendo queste espressioni nelle (2)″ del § 350, queste equazioni, nelle quali r e α, β, γ, a qualunque corpo si riferiscano, si dovranno intendere funzioni del tempo t separatamente determinate, saranno le equazioni differenziali del movimento del Pianeta relativo ad una terna d'assi coll'orientazione dei supposti assi fissi e l'origine nel suo centro di massa.

Notiamo che, se è $P = Q = R$ sarà $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{y}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{z}} = 0$, e il movimento relativo in discorso si ridurrà ad un movimento rotatorio uniforme coll'asse passante pel centro di massa. In ogni altro caso il movimento medesimo rivelerà l'influenza dei satelliti e del Sole.

Conformemente a ciò il movimento diurno del Globo Terrestre, non essendo questo che approssimativamente sferico, non sarà che con analoga approssimazione, come sensibilmente risulta, rotatorio uniforme, coll'asse passante pel centro. Realmente, per effetto del Sole e della Luna, l'asse istantaneo del movimento medesimo, varia col tempo; ciò che costituisce il fenomeno della " precessione degli equinozii „ e della " nutazione „, la cui teoria ha per fondamento i suesposti risultati.

Equilibrio.

§ 374. — Condizione necessaria perchè un sistema di corpi rigidi liberi sia, in un intervallo di tempo, in equilibrio, sarà, pel § 323, che, per ogni corpo si verifichino, ad ogni istante dell'intervallo, le relazioni:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0; \quad (1)$$

le quali sono tante quante sono i parametri che individuano la posizione dei singoli corpi, e per conseguenza del sistema.

Le $X, \ldots M_x, \ldots$ si debbono intendere in generale altrettante espressioni formate con questi parametri, non implicanti il tempo, nè le derivate dei parametri rispetto al tempo.

Quindi le precedenti relazioni formeranno in generale un sistema d'equazioni fra i parametri medesimi, atto a determinarne un valore fisso. E in tal caso esse saranno anche condizioni sufficienti per l'equilibrio del sistema.

In caso contrario, emerge da quanto precede (§ 358), che sarà inoltre necessario e sufficiente supporre che per questi corpi, la cui posizione dalle condizioni in discorso non risulta fissata, sia, ad un istante, nulla la forza viva.

L'insieme delle equazioni (1) è equivalente all'unica:

$$\int k \left(X_e \, \delta x + Y_e \, \delta y + Z_e \, \delta z \right) d\tau = 0, \tag{2}$$

dove τ rappresenta il volume complessivo di tutti i corpi del sistema: k e $(\delta x, \delta y, \delta z)$, la grandezza della densità e la velocità del punto qualunque (x, y, z) in conseguenza d'un atto di movimento virtuale qualsivoglia, col quale il sistema ha una posizione d'equilibrio: (X_e, Y_e, Z_e) finalmente, la forza acceleratrice in questo punto esterna rispetto al corpo, cioè al pezzo rigido del sistema, cui il punto appartiene. E questa equazione riceve più particolarmente il nome d' " equazione delle velocità virtuali ": mentre la proposizione da essa rappresentata — cioè che " condizione necessaria e sufficiente *per una posizione d'equilibrio* è che sia nulla la potenza delle forze esterne rispetto ai singoli corpi corrispondente ad un atto di movimento virtuale qualsivoglia con cui il sistema ha la supposta posizione " — si chiama il " teorema delle velocità virtuali ".

Questa equazione, quando il sistema delle forze (X_e, Y_e, Z_e) ammetta il potenziale, indicandolo al solito con W, si traduce in:

$$\delta W = 0,$$

" colla condizione che ogni corpo del sistema mobile sia invariabile "; la quale è condizione necessaria perchè il valore di W corrispondente alla supposta posizione sia massimo o minimo " subordinatamente alla suddetta condizione della rigidità dei singoli corpi ". Che se, per una posizione del sistema, W riceve, sotto questa condizione, un valor massimo, sarà una posizione d'equilibrio stabile (§ 325).

In quest'ultimo caso, perchè il mobile si mantenga fisso nella posizione d'equilibrio in discorso, è necessario e sufficiente che, ad un istante, la sua posizione sia quella, e l'atto di movimento nullo; cioè i valori delle variabili $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \varphi, f, \theta$, per ciascun corpo, quelli che corrispondono alla posizione d'equilibrio considerata, conformemente alle (1), e i loro coefficienti differenziali rispetto al tempo tutti zero.

Questa proposizione si estende ad ogni posizione d'equilibrio conforme alle (1), pur di ammettere *a priori* la possibilità

che il mobile vi si mantenga fisso: — inteso almeno, come d'ordinario, che il movimento sia univocamente determinato dalle relative equazioni differenziali, col concorso della posizione e dell'atto di movimento ad un istante. Difatti, allora, quel caso d'equilibrio riesce la forma di movimento corrispondente alle condizioni iniziali della supposta posizione e dell'atto di movimento nullo.

§ 375. Giova infine rilevare la proprietà generale delle posizioni a cui corrisponde un valor massimo del potenziale, che il mobile non se ne scosterà, nel corso del movimento, oltre un termine prefissato, se ad un istante la sua posizione è a quella ***abbastanza vicina***, e la forza viva inferiore ad un termine assegnabile. Ciò che si può dedurre per ragion di continuità dalla proposizione analoga del § 325, e si può anche dimostrare direttamente con simili riflessioni. Difatti, indicando con W_1 e T_1 il valore di W e la grandezza della forza viva nella supposta posizione iniziale, e con W_0, come al § 325, il valor massimo di W corrispondente alla posizione considerata, si troverà subito:

$$W_0 - W < W_0 - W_1 + T_1,$$

donde, essendo le differenze anche i loro valori assoluti, emerge che, supposto, oltre T_1 inferiore ad un certo valore, anche la posizione iniziale abbastanza prossima alla posizione corrispondente a W_0 perchè $W_0 - W_1$ sia inferiore ad un certo valore, la posizione del mobile non si scosterà mai dalla posizione corrispondente a W_0 tanto che $W_0 - W$ raggiunga un valore prefissato piccolo fin che si vuole.

Teorema di d'Alembert.

§ 376. — Cominciamo a dire che due sistemi di forze applicati ai punti di un corpo si fanno mutuamente equilibrio quando il sistema risultante dei due soddisfa le (1, § 374), ossia la (2, § 374). E chiamiamo il vettore le cui componenti sono $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z}{dt^2}$ (e quindi l'unità è quella di forza

acceleratrice) " forza acceleratrice d'inerzia „, al tempo t, nel punto il cui posto a questo istante è (x, y, z): conformemente al qual termine chiameremo il vettore:

$$\left(-k\frac{d^2x}{dt^2}, -k\frac{d^2y}{dt^2}, -k\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

la " forza specifica d'inerzia „ al tempo t, nel punto suddetto.

Confrontando la (2, § 374) colla (1, § 351) abbiamo la proposizione che " se un mobile è costituito da un insieme di corpi rigidi, il sistema delle forze esterne per rispetto ai singoli corpi e quello delle forze d'inerzia, applicati, l'uno e l'altro, ai punti del mobile, si fanno mutuamente equilibrio ad ogni istante „. E questo (almeno pel caso in discorso) è il celebre " Teorema di *d'Alembert* „.

Limiti del procedimento esposto.

§ 377. — Escluderemo quei movimenti conformi alle precedenti equazioni, che involgessero una compenetrazione dei corpi. Occorre invece considerare il caso che due o più corpi vengano, o si mantengano, fra loro a contatto. Il qual caso però non è da calcolarsi come *praticamente* traducibile in equazioni col metodo finora esposto; ma tale da richiedere il sussidio dei principii che formeranno l'oggetto dei capitoli seguenti.

CAPITOLO II.

PRESSIONE.

Riflessioni generali.

§ 378. — Comprenderemo i casi che ci restano a trattare — cioè i corpi rigidi vincolati e i corpi comunque variabili — sotto l'unico punto di vista del movimento d'un corpo, la cui superficie è prestabilito che tocchi quella d'un altro corpo, colla con-

dizione, o senza, che il sistema completo sia in movimento continuo.

Per esempio, i movimenti d' un corpo rigido tangente ad una superficie fissa, o avente una retta fissa, sono immagini dedotte da movimenti naturali come quelli d'una palla sopra una tavola, o d'un volante intorno al proprio asse; nei quali, una parte mobile del Globo Terrestre si move mantenendosi a contatto d'una parte fissa al Globo medesimo. Se non che, concentrando l'attenzione sulla parte mobile, il resto si surroga con un opportuno vincolo geometrico; oltre di che si passa al caso dei sostegni fissi, prescindendo dal movimento del Globo, e come limite d'una superficie cilindrica circolare fissa si ottiene l'asse di rotazione. D'altronde, il calcolo del movimento d'un corpo comunque variabile, si fonda su quello d'una parte del corpo piccola fin che si vuole, dalla quale, come limite, si passa al punto qualsivoglia; e questo è, come nei precedenti casi, un mobile alla cui superficie si prescrive di toccare quella d'un altro: e cioe il resto del corpo considerato.

Ora, quando ha luogo il contatto della superficie del mobile con quella d'un altro corpo, giova l'intervento del concetto di " pressione ": cioè d'un vettore definito per ogni punto della superficie; col quale si congiunge la " forza limite ", vettore definito pei punti del corpo, la cui determinazione si fonda sulla forza elementare soggetta alla condizione che la distanza dei punti si mantenga superiore ad un certo termine, ancorchè non praticamente assegnabile. La pressione e la forza limite surrogano, come si vedrà a suo luogo, nelle equazioni cardinali la forza esterna, comprendente, in generale, il caso che la distanza di due punti possa diventare minore d'ogni termine prefissato. E in ciò consiste principalmente il vantaggio di questi concetti; poichè la pressione, per le relazioni a cui dà luogo, meglio si presta alle ipotesi, nei singoli casi, più opportune. Notiamo che non altrimenti, nel ragionamento famigliare, si traduce colla pressione della mano l'azione dei muscoli del corpo; circostanza, nella quale va cercata l'origine del nome.

Forza limite.

§ 379. — Sia una forza elementare atta al calcolo della forza acceleratrice *esterna* in un punto qualunque d'un corpo concepito isolato con uno e più altri quali si vogliano, in una certa condizione fisica. " Forza acceleratrice limite „ corrispondente a quella forza elementare, in un punto di un corpo, chiamiamo il limite della forza acceleratrice esterna nello stesso punto, calcolata in base alla supposta forza elementare dipendente dal corpo che si ricava dal complesso dei corpi considerati, levandone un intorno del punto, collo svanire del raggio d'una sfera capace di contenere l'intorno medesimo.

In particolare chiamiamo " forza acceleratrice limite, dipendente dal corpo cui il punto appartiene „ o " forza acceleratrice limite interna „, la quantità definita nel suddetto modo rispetto al corpo a cui il punto è supposto appartenere, prescindendo da ogni altro corpo. E allora si vede che in un punto *interno* la forza acceleratrice limite sarà sempre la risultante della forza acceleratrice limite interna, e della forza acceleratrice esterna, calcolata in base alla supposta forza elementare. Mentre per un punto della superficie reggerà la stessa conclusione se non vi è per avventura contatto con qualche altro corpo; nel qual caso la forza acceleratrice limite sarà la risultante delle forze acceleratrici limite interne nello stesso punto, concepito come appartenente al corpo considerato, e a quello formato dall'insieme di tutti gli altri.

§ 380. — Immaginiamo un corpo C, e indichiamo con X_l, Y_l, Z_l le componenti della forza acceleratrice limite interna d'una certa specie (corrispondente ad una certa forza elementare) nel suo punto qualunque (x, y, z). Concepiamo il corpo che si ricava da esso, levandone un intorno qualunque del punto (x, y, z); e indichino x', y', z' le coordinate del suo punto corrente, k' la grandezza della densità in esso, τ' quella del volume. Finalmente mm' **R** rappresenti la grandezza della supposta forza elementare, col significato dei simboli a suo luogo spiegato (§ 297).

Sarà:

$$\left.\begin{aligned} X_l &= \pm \int k' \mathbf{R} \frac{x - x'}{r} d\tau' + \varepsilon_x, \\ Y_l &= \pm \int k' \mathbf{R} \frac{y - y'}{r} d\tau' + \varepsilon_y, \\ Z_l &= \pm \int k' \mathbf{R} \frac{z - z'}{r} d\tau' + \varepsilon_z, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dove:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

e ε_x, ε_y, ε_z svaniscono col raggio d'una sfera capace di contenere l'intorno.

§ 381. — Ammetteremo, salvo verificare nei singoli casi l'ipotesi:

1) che ε_x, ε_y, ε_z svaniscano, nel campo rappresentato da C uniformemente; cioè che, fissato ε positivo, piccolo a piacere, esista ρ, *indipendente da* x, y, z, tale ehe, se l'intorno è racchiudibile da una sfera di raggio $< \rho$, sarà:

$$|\varepsilon_x| < \varepsilon, \qquad |\varepsilon_y| < \varepsilon, \qquad |\varepsilon_z| < \varepsilon;$$

2) che X_l, Y_l, Z_l siano, nel campo rappresentato da C, funzioni finite e continue del punto (x, y, z);

3) che il valore di X_l, Y_l, Z_l, nei punti della superficie del campo medesimo, sia il limite della componente secondo lo stesso asse della forza acceleratrice della specie considerata dipendente dal corpo C in un punto *esterno* al campo, cioè al corpo C, col tendere di questo punto al supposto punto della superficie.

§ 382. — Dimostriamo che:

$$\int k \left(X_l \frac{dx}{dt} + Y_l \frac{dy}{dt} + Z_l \frac{dz}{dt} \right) d\tau, \qquad (1)$$

dove τ indica il volume del campo rappresentato dal corpo C, e k la grandezza della densità nel suo punto qualunque M o (x, y, z), è nullo per ogni atto di movimento al tempo t conciliabile colla rigidità del corpo C medesimo.

Difatti, per le precedenti (1, § 380), questo integrale equivale a:

$$\int k\,d\tau \int \frac{k'\mathbf{R}}{r}\left((x-x')\frac{dx}{dt}+(y-y')\frac{dy}{dt}+(z-z')\frac{dz}{dt}\right)d\tau'$$
$$+\int k\left(\varepsilon_x\frac{dx}{dt}+\varepsilon_y\frac{dy}{dt}+\varepsilon_z\frac{dz}{dt}\right)d\tau. \qquad (2)$$

Ora, noi possiamo immaginare dedotto dal corpo C l'altro, cui si riferiscono i simboli accentati, levandone il pezzo contenuto in una sfera col centro in (x, y, z) e un certo raggio *indipendente da questo punto.* In tal caso si riconosce agevolmente che:

$$\int k\,d\tau \int \frac{k'\mathbf{R}}{r}(x-x')\frac{dx}{dt}\,d\tau' = \int k\,d\tau \int \frac{k'\mathbf{R}}{r}(x'-x)\frac{dx'}{dt}\,d\tau'.$$

Per modo che (cfr. § 299) il primo termine si può rappresentare con:

$$\frac{1}{2}\int k\,d\tau \int k'\mathbf{R}\frac{dr}{dt}\,d\tau';$$

donde scaturisce senz'altro che avrà valor zero per ogni atto di movimento tale che r si mantenga costante per ogni coppia di punti del campo C, cioè per ogni atto di movimento conciliabile colla rigidità del corpo C.

Ne viene che, per ogni atto di movimento così fatto, (1) si riduce al secondo termine di (2); e poichè questo, nelle nostre ipotesi (§ 381), svanisce col raggio ρ della sfera relativa al punto qualunque M del campo, mentre (1) è da questa variabile indipendente, si conclude che (1) deve aver valor zero, c. v. d.

§ 383. — Da questa proposizione, che collima con quella del § 300, segue immediatamente collo stesso procedimento del § 304:

$$\left.\begin{aligned}&\int k\,X_i\,d\tau=0, && \int k\,Y_i\,d\tau=0, && \int k\,Z_i\,d\tau=0,\\ &\int k(yZ_i-zY_i)d\tau=0, && \int k(zX_i-xZ_i)d\tau=0, && \int k(xY_i-yX_i)d\tau=0,\end{aligned}\right\}(1)$$

sei equazioni equivalenti alla proposizione medesima, cioè all'unica:

$$\int k\,(X_l\,\delta x + Y_l\,\delta y + Z_l\,\delta z) = 0, \qquad (2)$$

ove $(\delta x, \delta y, \delta z)$ rappresenta la velocità al tempo t nel punto di cui x, y, z sono coordinate al tempo stesso, per un atto di movimento virtuale qualsivoglia conciliabile colla rigidità.

I vettori le cui componenti sono i primi membri della prima e della seconda terna delle equazioni (1) si chiameranno, secondo il § 301, risultante del sistema delle forze acceleratrici limite dipendenti dal corpo C, o forze acceleratrici limite interne, applicate ai punti del corpo medesimo, e risultante dei loro momenti rispetto al punto preso per origine delle coordinate come polo. E le (1), o la (2), esprimono che questi due vettori sono nulli, come per le forze interne (§ 304).

Forza intima.

§ 384. — Concepito un corpo C in movimento determinato da forze esterne di una certa specie qualsivoglia e dalle forze interne, chiameremo talvolta “ forza acceleratrice intima corrispondente ad una certa specie di forza acceleratrice limite „ ne' suoi singoli punti, il vettore che, composto colla forza acceleratrice limite interna di quella specie, s'intende fornire per risultante la forza acceleratrice interna.

Ancorchè la forza acceleratrice intima così definita possa non riuscire suscettibile di determinazione diretta, potremo affermare, per le proprietà generali delle forze interne e delle forze limite, che saranno costantemente nulli la potenza del sistema delle forze intime applicato ai punti del corpo, per ogni atto di movimento conciliabile colla rigidità del corpo medesimo, il risultante del sistema stesso, e quello dai momenti rispetto ad un punto qualunque come polo.

Forza limite di gravitazione universale.

§ 385. — Indicando, come al § 333, con x', y', z' e k' le coordinate del punto qualunque del corpo considerato e la grandezza della densità in esso punto, e ommettendo di scrivere, per brevità, il fattore $\varkappa^2$, la componente secondo l'asse delle x della forza acceleratrice di gravitazione universale dipendente da questo corpo in un punto (x, y, z) *esterno* al corpo medesimo è data da:

$$\int k' \frac{x' - x}{r^3} d\tau', \qquad (1)$$

dove al solito:

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Assumiamo (x, y, z) come polo di coordinate sferiche, per modo che r sia il raggio vettore del punto (x', y', z'), e θ, φ ne indichino la colatitudine e la longitudine rispetto ad un certo asse polare e ad un primo meridiano concepiti scelti a piacere.

Indichiamo poi con $r_0, r_1, \ldots r_{2n+1}$ i valori di r pei punti in cui il raggio vettore spiccato da (x, y, z) coll'orientazione (θ, φ) alternativamente penetra nel corpo e ne esce, e poniamo:

$$\int_r = \int_{r_0}^{r_1} + \int_{r_1}^{r_2} + \ldots + \int_{r_{2n}}^{r_{2n+1}}.$$

Infine, intendendo che i limiti di θ e φ siano quelli che occorrono perchè la coppia θ, φ riceva i valori corrispondenti a tutti i raggi uscenti dal punto (x, y, z) che incontrano la superficie del corpo (per modo che:

$$\omega = \int d\varphi \int \sin\theta \, d\theta$$

sia la misura dell'area del pezzo di superficie sferica col centro in esso punto e raggio 1 intersecato da quei raggi) facciamo:

$$\int_\omega \ldots d\omega = \int d\varphi \int \ldots \sin\theta \, d\theta.$$

Con ciò (1) acquisterà la forma:

$$\int_{\omega} \cos(rx)\, d\omega \int_{r} k'\, dr. \tag{2}$$

Ora questa espressione conserva un valore finito anche se il polo (xy, z) dei raggi r si suppone appartenere al corpo considerato: cioè (x, y, z) si suppone un particolar valore di (x', y', z'). Ed è facile riconoscere innanzi tutto che tale valore rappresenta il limite dell'integrale (1), applicato, non al corpo in discorso, ma ad un corpo che se ne ricava levandone un intorno del punto (x, y, z), collo svanire d'una sfera capace dell'intorno medesimo.

Difatti, concepito questo integrale trasformato col precedente processo, e ridotto alla forma (2), da questa si passerà immediatamente all'espressione:

$$\int_{\dot{\omega}} \cos(rx)\, d\omega \int_{\dot{r}} k'\, dr - \left(\int_{\omega} \cos(rx)\, d\omega \int_{\dot{r}} k'\, dr \right). \tag{3}$$

dove il primo termine si applica, come (2), a tutto il corpo considerato, e il secondo ha lo stesso significato per l'intorno. Per esempio, nell'ipotesi che (x, y, z) sia un punto *interno* al corpo, e ogni raggio uscente da esso incontri la superficie in un punto solo, se si prende un intorno per la cui superficie avvenga lo stesso, la trasformazione suddetta dell'integrale (1), applicato al corpo limitato esternamente dalla superficie del dato e internamente da quella dell'intorno, lo riduce a:

$$\int_{4\pi} \cos(rx)\, d\omega \int_{r_0}^{r_1} k'\, dr,$$

dove, per ogni coppia (θ, φ), indicano r_0 e r_1 il raggio vettore dell'intersezione della superficie dell'intorno e del corpo dato col raggio uscente con quell'orientazione da (x, y, z). Ed essendo:

$$\int_{r_0}^{r_1} k'\, dr = \int_{0}^{r_1} k'\, dr - \int_{0}^{r_0} k'\, dr,$$

si può sostituire alla precedente espressione:

$$\int\limits_{4\pi} \cos(rx)\, d\omega \int\limits_{0}^{r_1} k'\, dr - \int\limits_{4\pi} \cos(rx)\, d\omega \int\limits_{0}^{r_0} k'\, dr,$$

che è la (3) pel caso in discorso.

Ma, indicando con K il limite superiore di k nel campo rappresentato dal corpo dato, e con λ la grandezza della massima corda della superficie dell' intorno, si ha:

$$\left|\left(\int\limits_{\omega} \cos(rx)\, d\omega \int\limits_{r} k'\, dr\right)\right| < 4\pi K\lambda,$$

per modo che, fissato ε positivo piccolo a piacere, perchè il primo membro riesca minore di ε, basta prendere:

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{4\pi K},$$

e *a fortiori* la grandezza del raggio ρ d' una sfera capace di contenere l'intorno minore di quel numero, che, notiamo, come sia indipendente da (x, y, z).

Concludiamo dunque che (2), nell' ipotesi che il polo (x, y, z) appartenga al corpo considerato, rappresenta la componente secondo l'asse delle x della forza acceleratrice limite di gravitazione universale nel punto (x, y, z) dipendente dal corpo considerato cui il punto stesso è inteso appartenere.

E osserviamo come la differenza fra il limite che rappresenta l'espressione medesima e il corrispondente integrale (1) applicato ad un corpo che si deduce dal dato levandone un intorno del punto (x, y, z), secondo la definizione del § 380 svanisce uniformemente, nel campo rappresentato dal corpo, col raggio d'una sfera comprendente l' intorno, conformemente alla ipotesi 1) del § 381.

§ 386. — La forza acceleratrice limite, di cui abbiamo così constatato l' esistenza, è funzione continua del relativo posto (x, y, z).

Per dimostrarlo, immaginiamo un secondo punto del corpo $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, e concepiamo un intorno del primo, in cui esso sia compreso. La forza acceleratrice limite in ognuno

dei due punti sarà la risultante della forza acceleratrice esterna nel punto dipendente dal corpo che si ricava dal dato levandone quell'intorno, e della forza acceleratrice limite corrispondente all'intorno: onde l'aumento d'ogni componente relativo al passaggio dal primo al secondo punto sarà la somma degli aumenti della componente secondo lo stesso asse dei due vettori medesimi. E siccome il primo vettore è senz'altro funzione continua del punto (x, y, z), e il valore del secondo in ciascuno dei due punti svanisce col raggio d'una sfera capace di contenere l'intorno, per quanto s'è veduto nel § precedente, concludiamo che l'aumento suddetto riuscirà in valor assoluto minore di un numero positivo prefissato piccolo a piacere, pur d'intendere il secondo punto entro una sfera col centro nel primo, di raggio abbastanza piccolo: ciò che significa essere la componente della forza acceleratrice limite nel punto (x, y, z), e la forza acceleratrice medesima, funzione continua del punto (x, y, z), c. v. d.

§ 387. — Così abbiamo verificato anche l'ipotesi 2) del § 381. Per verificare la 3) — e cioè che il valore della forza acceleratrice limite in un punto della superficie del corpo è il limite della forza acceleratrice esterna dipendente dallo stesso corpo in un punto fuori del campo da esso rappresentato, col tendere di questo punto a quello — immaginiamo ancora il pezzo di corpo contenuto in un certo intorno del punto considerato della superficie. La forza acceleratrice nel punto esterno sarà la risultante delle forze acceleratrici dipendenti dall'intorno e dal corpo che si deduce dal dato levandone l'intorno medesimo, ambedue esterne: e la forza acceleratrice limite nel punto della superficie, la risultante della forza acceleratrice limite dipendente dall'intorno, e della forza acceleratrice esterna dipendente dal suddetto corpo: onde la differenza fra la componente secondo un asse della forza acceleratrice nel punto esterno e quella della forza acceleratrice limite nel punto della superficie, eguale alla somma dell'incremento della forza acceleratrice esterna dipendente dal corpo che si ricava dal dato togliendone l'intorno, relativo al passaggio dal punto della superficie al punto esterno rispetto al corpo dato, ambedue invece esterni a quello, e della

differenza fra le componenti delle due forze acceleratrici dipendenti dall' intorno. Ne viene immediatamente, poichè quella si sa essere funzione continua, e queste, (cfr. § 385), svaniscono col raggio di una sfera comprendente l'intorno, che la differenza suddetta si manterrà in valor assoluto minore d' un termine assegnabile, pur di supporre il punto esterno entro una sfera col centro nel punto della superficie, di raggio abbastanza piccolo, e l' intorno comprendibile entro una sfera pure di raggio abbastanza piccolo: condizione, questa, puramente apparente, perchè la differenza in discorso ha valore indipendente dall'intorno; per modo che basta la prima. Ciò che dimostra l'enunciato.

§ 388. — Dimostriamo ora, almeno nell' ipotesi che la grandezza della densità ammetta le derivate parziali rispetto alle coordinate del posto continue e finite, che le componenti della forza acceleratrice limite in un punto sono le derivate secondo la coordinata del punto, corrispondente al relativo asse, d'una stessa funzione: cioè che la forza limite di gravitazione universale ammette funzione delle forze (§ 259).

Perciò premettiamo, in primo luogo, che, se le considerazioni del § 385 si applicano all' integrale:

$$\int \frac{k'\,d\tau'}{r}, \tag{1}$$

si troverà, collo stesso procedimento, che le relazioni esistenti fra (1) e (2) di quel § stanno fra (1) e:

$$\int_\omega d\omega \int_r k'\,r\,dr, \tag{2}$$

la quale riesce parimente funzione continua e finita del posto del corpo considerato, e, nei punti della superficie, limite della funzione potenziale del corpo sopra un punto esterno col tendere di questo punto alla superficie.

In secondo luogo, abbiamo, colla precedente ipotesi sulla densità, nell'ipotesi che il punto (x, y, z) sia esterno al campo τ':

$$\int k' \frac{x'-x}{r^3}\,d\tau' = -\int k' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'}\,d\tau' = -\int \frac{d\frac{k'}{r}}{dx'}\,d\tau' + \int \frac{1}{r}\frac{dk'}{dx'}\,d\tau';$$

e pel teorema di *Gauss* (§ 68):

$$-\int \frac{d\frac{k'}{r}}{dx'}\,d\tau' = \int \frac{k'}{r}\cos(n'x)\,d\sigma',$$

indicando con σ' la grandezza della superficie del campo τ' e con n' la normale nel suo punto qualunque volta verso l'interno. Quindi, per la componente secondo l'asse delle x della forza acceleratrice limite di gravitazione universale nel punto (x, y, z) dipendente dal corpo cui il punto stesso è supposto appartenere, l'espressione:

$$\int \frac{k'\cos(n'x)}{r}\,d\sigma' + \int_\omega d\omega \int_r \frac{dk'}{dx'}\,r\,dr, \tag{3}$$

dove σ' si riferisce alla superficie del corpo medesimo.

Ciò premesso, sia il punto (x, y, z) *interno* al corpo considerato, e per un momento la superficie di questo corpo tale che ogni raggio spiccato dai punti d'una sfera col centro in (x, y, z) l'incontra in un punto solo. Consideriamo un secondo punto $(x + \Delta x, y, z)$, compreso in questa sfera, e, per ogni coppia di valori θ, φ, indichiamo con r_ω, $r_\omega + \Delta r_\omega$ e (r_ω) la grandezza del raggio descritto alla superficie con tale orientazione dal primo e dal secondo punto, e quella del più breve dei due.

Il valore di (2) nel primo e nel secondo punto sarà rappresentato da:

$$\int_{4\pi} d\omega \int_0^{r_\omega} k'\,r\,dr, \qquad \int_{4\pi} d\omega \int_0^{r_\omega + \Delta r_\omega} k'\,r\,dr. \tag{4}$$

Immaginiamo i punti dei due raggi spiccati da (x, y, z) e $(x + \Delta x, y, z)$ coll'orientazione (θ, φ) aventi dai rispettivi poli la distanza r. Essi saranno sopra una parallela all'asse delle x, e il segmento avente l'origine nel primo e il termine nel secondo avrà per misura Δx, per modo che, se x', y', z' sono le coordinate del primo punto, saranno $x' + \Delta x$, y', z' quelle del secondo. Indichiamo con k' la grandezza della densità nel primo, e con $k' + \Delta k'$ quella della stessa funzione nel secondo.

La differenza dal secondo al primo dei valori (4), cioè l'aumento della funzione (2) in discorso, corrispondente al passaggio dal punto (x, y, z) al punto $(x + \Delta x, y, z)$, si potrà, con tal significato dei simboli, e tenuto conto delle premesse ipotesi, porre sotto la forma:

$$\int_{4\pi} d\omega \int_{r_\omega}^{r_\omega + \Delta r_\omega} (k') \, r \, dr + \int_{4\pi} d\omega \int_{0}^{(r_\omega)} \Delta k' \, r \, dr,$$

dove (k') appartiene al più lungo dei raggi spiccati dai due punti rispettivamente, ossia (§ 65):

$$\int_{4\pi} (\overline{k'}) \left(r_\omega + \frac{1}{2} \Delta r_\omega\right) \Delta r_\omega \, d\omega + \int_{4\pi} d\omega \int_{0}^{(r_\omega)} \Delta k' \, r \, dr, \tag{5}$$

dove $(\overline{k'})$ indica la grandezza della densità in un certo punto dell'uno o dell'altro raggio, a seconda del caso, compreso fra quelli le cui distanze dal polo sono r_ω e $r_\omega + \Delta r_\omega$; donde segue:

$$\lim_{\Delta x = 0} (k') = k'_\omega, \tag{6}$$

indicando per un momento con k'_ω la grandezza della densità nell'intersezione della superficie col raggio spiccato da (x, y, z) coll'orientazione (θ, φ).

Ora, immaginata l'intersezione della superficie col piano contenente la parallela per (x, y, z) all'asse delle x e il raggio descritto da esso punto colla supposta orientazione (θ, φ), indicando con $(t'x)$, $(t'r_\omega)$ le grandezze degli angoli minori di due retti formati dalla tangente alla linea medesima nel suo punto d'intersezione con quel raggio coll'asse delle x e col raggio, si ha subito:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta r_\omega}{\Delta x} = \pm \frac{\sin (t'x)}{\sin (t'r_\omega)}, \tag{7}$$

dove si deve prendere + o — secondo che è $(t'r_\omega)$ minore o maggiore di $(x r_\omega)$, così indicando la grandezza dell'angolo formato dal raggio coll'asse delle x.

Ma, se il raggio ρ è perpendicolare a ρ_2, e ρ_2 al piano di ρ_1 e ρ_3, si ha, indicando nel suddetto modo la grandezza dell'angolo di due raggi:

$$\cos (\rho \rho_1) = \pm \sin (\rho_1 \rho_3) \sin (\rho \rho_3),$$

dove va preso + o — secondo che la projezione di ρ sul piano di ρ_1 e ρ_2 cade dalla stessa parte del piano di ρ_2 e ρ_3 donde cade ρ_1 o dalla parte opposta.

Ne viene, indicando con p la perpendicolare al piano della sezione considerata, volta in un certo senso:

$$\cos(n' r_\omega) = -\sin(t' r_\omega)\sin(n' p), \quad \cos(n' x) = \pm \sin(t' x)\sin(n' p),$$

dove va preso + o — secondo che è $(t' r_\omega)$ minore o maggiore di $(x r_\omega)$; e per conseguenza:

$$\pm \frac{\sin(t' x)}{\sin(t' r_\omega)} = -\frac{\cos(n' x)}{\cos(n' r_\omega)}.$$

Allora, per (7) e (6), rammentando:

$$r^2_\omega\, d\omega = -\cos(n' r_\omega)\, d\sigma', \tag{8}$$

si ha:

$$\lim_{\Delta x = 0} \int_{4\pi} (\bar{k}) \left(r_\omega + \frac{1}{2}\Delta r_\omega \right) \frac{\Delta r_\omega}{\Delta x}\, d\omega = \int \frac{k' \cos(n' x)}{r}\, d\sigma',$$

dove nel secondo membro s'è ommesso, perchè diventato superfluo, l'indice ω.

D'altra parte, nelle nostre ipotesi:

$$\lim_{\Delta x = 0} \int_{4\pi} d\omega \int_0^{(r_\omega)} \frac{\Delta k'}{\Delta x}\, r\, dr = \int_{4\pi} d\omega \int_0^{r_\omega} \frac{dk'}{dx'}\, r\, dr.$$

Si conclude quindi che la funzione (2) ammette nel punto (x, y, z) coefficiente differenziale parziale rispetto a x, rappresentato da:

$$\int \frac{k' \cos(n' x)}{r}\, d\sigma' + \int_{4\pi} d\omega \int_0^{r_\omega} \frac{dk'}{dx'}\, r\, dr,$$

che, per (3), è la componente secondo l'asse delle x della forza acceleratrice limite nel punto (x, y, z) dipendente dal corpo considerato.

La restrizione che la superficie del corpo sia da ogni raggio spiccato dal punto considerato, e dai punti in prossimità di esso,

incontrata in un punto solo si leva subito, osservando che, qualunque sia il corpo, essendo il punto considerato supposto ***interno***, esso potrà concepirsi come la riunione di due, per l'un dei quali la suddetta condizione si verifica, mentre per l'altro il punto è esterno; per modo che la proposizione starà per ambedue, e quindi necessariamente per l'insieme.

Finalmente la proposizione si estende al caso che il punto, anzi che interno, sia alla superficie, per una proprietà generale, essendo le due funzioni (2) e (2, § 385) ambedue continue e finite nel campo rappresentato dal corpo, compresa la superficie, e, conformemente alla proposizione in discorso, la seconda mantenendosi la derivata della prima rispetto alla x in ogni punto interno, prossimo alla superficie fin che si vuole.

§ 389. — Ciò che, secondo la nostra definizione, è la forza acceleratrice limite di gravitazione universale in un punto d'un corpo dipendente dal corpo medesimo, o, senz' altro, interna, si suol chiamare "forza acceleratrice di gravitazione universale dipendente dal corpo, interna al corpo", o "nei punti del corpo": e la relativa funzione delle forze, di cui nel precedente § abbiamo dimostrato l'esistenza e riconosciuto la forma (2, § 388), parimente "funzione potenziale del corpo interna" o "nei punti del corpo".

Con ciò la funzione potenziale d'un corpo, V, e la forza acceleratrice di gravitazione universale dipendente dal corpo medesimo, (X, Y, Z), vengono definite in ogni posto (x, y, z) dello spazio, e riescono funzioni del posto dappertutto continue e finite, collegate fra loro dalle relazioni:

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz}.$$

§ 390. — Nel campo esterno al corpo potenziante la relativa funzione potenziale soddisfa (§ 334) all'equazione:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

Mostreremo, coll'esempio d'un corpo omogeneo, che ciò non sta più pel campo rappresentato dal corpo potenziante medesimo.

Difatti, nell'ipotesi di k' costante, indicandone con k il valore, la (3, § 388) ci dà:

$$\frac{dV}{dx} = k\int \frac{\cos(n'x)\, d\sigma'}{r},$$

donde, nell'ipotesi che (x, y, z) sia *interno* al corpo, e perciò non coincidente con alcuno dei valori di (x', y', z') a cui l'integrale si riferisce:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = k\int \cos(n'x) \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\, d\sigma' = k\int \frac{\cos(n'x)\cos(rx)}{r^2}\, d\sigma'.$$

e le formole analoghe, che si ottengono cambiando x in y e z.

Ne viene:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = k\int \frac{\cos(n'r)}{r^2}\, d\sigma',$$

e per (8, § 388);

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi k,$$

la quale è, pel caso dei corpi omogenei in discorso, l' "equazione di *Poisson*".*

Funzione potenziale dell'ellissoide omogeneo in un suo punto.

§ 391. — Sia, per semplicità di scrittura, 1 la grandezza della densità dell'ellissoide, e il punto interno: dal qual caso emerge poi immediatamente quello del punto alla superficie. Conformemente a (2, § 388), abbiamo:

$$V = \int_\omega d\omega \int r\, dr = \frac{1}{2}\int_\omega r^2\, d\omega,$$

dove il campo rappresentato da ω è la superficie sferica di raggio 1 col centro nel punto considerato, e r, nel terzo membro,

* Una più completa trattazione dell'argomento dei §§ 385-390, è oggetto della mia Memoria: *Sulle proprietà fondamentali della funzione potenziale nella immediata prossimità e nell'estensione dell'agente*, pubblicata nel *Nuovo Cimento* (Serie 3ª) Vol. XXXIII.

rappresenta il raggio vettore, rispetto al punto medesimo come polo, del punto qualunque della superficie. E di qui, indicando con r_1, r_2 i valori di r corrispondenti ad orientazioni eguali ed oppòste quali si vogliano, e con σ il campo rappresentato da metà della suddetta superficie sferica, per modo che:

$$\int_\sigma \ldots d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \sin\theta \, d\theta,$$

anche:

$$V = \int_\sigma \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} d\sigma.$$

Ora, indicando con x, y, z le coordinate ordinarie del punto considerato, e con α, β, γ i coseni di direzione del raggio descritto da esso al punto cui appartiene il raggio vettore r_1, le coordinate di questo punto, e del punto antipode, cui appartiene r_2, saranno $x + \alpha r_1$, $y + \beta r_1$, $z + \gamma r_1$, e $x - \alpha r_2$, $y - \beta r_2$, $z - \gamma r_2$. Stabiliamo che la terna in discorso sia formata dagli assi dell'ellissoide, e indichiamo i suoi semiassi con a, b, c. Ne viene che quelle due terne di valori dovranno soddisfare all'equazione:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

E per conseguenza r_1 e $-r_2$ saranno le radici dell'equazione in r:

$$\frac{(x + \alpha r)^2}{a^2} + \frac{(y + \beta r)^2}{b^2} + \frac{(z + \gamma r)^2}{c^2} = 1,$$

ossia, sviluppando:

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) r^2 + 2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right) r - \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0;$$

per modo che: *

* Posto $g(r - r_1)(r - r_2) = gr^2 + 2fr - e$, dalle note relazioni

$$r_1 + r_2 = -2\frac{f}{g}, \qquad r_1 r_2 = -\frac{e}{g}$$

si ricava immediatamente:

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \frac{2f^2 + eg}{g^2}.$$

$$\frac{r_1^2+r_2^2}{2}=\frac{\left(\frac{2x^2}{a^2}+e\right)\frac{\alpha^2}{a^2}+\left(\frac{2y^2}{b^2}+e\right)\frac{\beta^2}{b^2}+\left(\frac{2z^2}{c^2}+e\right)\frac{\gamma^2}{c^2}+Q}{\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2},$$

dove:

$$e=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2},\quad Q=4\left(\frac{yz\beta\gamma}{b^2c^2}+\frac{zx\gamma\alpha}{c^2a^2}+\frac{xy\alpha\beta}{a^2b^2}\right). \quad (1)$$

Ora, è

$$\int_\sigma \frac{Q\,d\sigma}{\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2}=0;$$

poichè, il campo d'integrazione essendo rappresentato da una metà della superficie sferica di raggio 1, per ogni terna di valori (α, β, γ) appartenente ad un posto del campo, si hanno le due terne $(\alpha, -\beta, \gamma)$, $(-\alpha, \beta, \gamma)$ appartenenti a posti simmetrici rispetto al raggio orientato come l'asse delle z, nei quali il primo e il terzo, il secondo e il terzo dei tre termini in cui, conformemente a (1), si decompone la funzione integranda riceve valore eguale e di segno contrario a quello del primo.

Si trova così:

$$V=\int_\sigma \frac{\left(\frac{2x^2}{a^2}+e\right)\frac{\alpha^2}{a^2}+\left(\frac{2y^2}{b^2}+e\right)\frac{\beta^2}{b^2}+\left(\frac{2z^2}{c^2}+e\right)\frac{\gamma^2}{c^2}}{\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)^2}\,d\sigma;$$

ossia:

$$V=e\,\Phi+\frac{x^2}{a}\frac{d\Phi}{da}+\frac{y^2}{b}\frac{d\Phi}{db}+\frac{z^2}{c}\frac{d\Phi}{dc}, \quad (2)$$

dove:

$$\Phi=\int_\sigma \frac{d\sigma}{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}}.$$

Per effettuare l'integrazione, poniamo (§ 24):

$$\alpha = \cos\varphi \sin\theta, \qquad \beta = \sin\varphi \sin\theta, \qquad \gamma = \cos\theta,$$

$$\frac{1}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\gamma^2 = H, \qquad \frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\gamma^2 = K.$$

Abbiamo così:

$$\Phi = \int_0^1 d\gamma \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{H\cos^2\varphi + K\sin^2\varphi}.$$

Ed essendo, come si trova con $\tan\varphi = t$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{H\cos^2\varphi + K\sin^2\varphi} = 4\int_0^\infty \frac{dt}{H + Kt^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{HK}},$$

in primo luogo:

$$\Phi = 2\pi \int_0^1 \frac{d\gamma}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\gamma^2\right)\left(\frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\gamma^2\right)}},$$

donde, posto:

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda}},$$

si ricava:

$$\Phi = \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}};$$

e per (2):

$$V = \pi abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}},$$

espressione di *Dirichlet.* *

---

* V. *Thomson* e *Tait.* — *Nat. Phil.*, Vol. II, pag. 44. Questa formola costituisce il fondamento della celebre teoria dell'attrazione dell'ellissoide, nella quale non c'inoltriamo, per non oltrepassare i limiti che ci siamo prescritti, rimandando ai trattati più estesi e speciali, tra cui il suddetto, e *Betti* — *Teoria delle forze newtoniane* — Pisa, 1879; *Riemann* — *Schwere, Electricität und Magnetismus* — Hannover, 1876.

Postulato della pressione.

§ 392. — Ammetteremo che, per ogni condizione fisica che occorra considerare, la forza acceleratrice esterna in un punto d'un corpo, concepito isolato con uno o più altri quali si si vogliano, sia calcolabile, sotto la condizione che il punto si mantenga a distanza sensibile da ogni punto di questi corpi, in base ad una forza elementare, a cui corrisponde una certa forza acceleratrice limite parimente in un punto d'un corpo, concepito isolato con uno o più corpi qualunque (§ 379). Tale, osserviamo, è il caso dello stato naturale; in cui, stabilito che un corpo si mantenga a distanza sensibile da ogni altro, la forza acceleratrice esterna in ogni suo punto si calcola in base alla legge elementare newtoniana; alla qual legge elementare corrisponde una forza acceleratrice limite in un punto, nel modo che a suo luogo abbiamo veduto.

Convenuta la qual circostanza, ammetteremo in secondo luogo che, per ogni corpo, e per ogni parte del corpo medesimo, si verifichino ad ogni istante le sei equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\int k \frac{d^2x}{dt^2} d\tau &= \int k\, X_t\, d\tau + \int X_n\, d\sigma,\\
\int k \frac{d^2y}{dt^2} d\tau &= \int k\, Y_t\, d\tau + \int Y_n\, d\sigma,\\
\int k \frac{d^2z}{dt^2} d\tau &= \int k\, Z_t\, d\tau + \int Z_n\, d\sigma,\\
\int k \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) d\tau &= \int k\, (y Z_t - z Y_t)\, d\tau + \int (y Z_n - z Y_n)\, d\sigma,\\
\int k \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) d\tau &= \int k\, (z X_t - x Z_t)\, d\tau + \int (z X_n - x Z_n)\, d\sigma,\\
\int k \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) d\tau &= \int k\, (x Y_t - y X_t)\, d\tau + \int (x Y_n - y X_n)\, d\sigma,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove i simboli hanno il significato seguente.

Al solito, t indica il valore del tempo determinante l'istante considerato, e x, y, z dinotano le coordinate del punto qualunque del mobile, k la grandezza della densità in questo punto, τ e σ

le grandezze del volume e della superficie del mobile (il corpo considerato, o una sua parte qualsivoglia), all'istante medesimo.

X_f, Y_f, Z_f dinotano le componenti della forza acceleratrice limite nel punto (x, y, z), corrispondente alla condizione fisica e ai corpi supposti, secondo la premessa convenzione. *

Finalmente X_n, Y_n, Z_n indicano le componenti d'un vettore, collegato col precedente, che si deve intendere definito col concorso delle stesse equazioni (1) e della seguente proprietà:

" Ogniqualvolta due parti d'un corpo sono chiuse da superficie aventi un punto comune e comune in esso la normale interna, la quale determinerà un certo raggio uscente dal punto che designeremo con n, concependo le precedenti equazioni (1) applicate alle due parti, competerà a quel punto lo stesso valore di X_n, Y_n, Z_n. "

Con ciò viene stabilita l'esistenza di questo vettore per ogni punto (x, y, z) e per ogni raggio n uscente da esso.

Noi lo chiameremo la " pressione specifica nel punto (x, y, z) relativa al raggio n ". Che se il punto (x, y, z) s'immagina appartenere ad una superficie, e il raggio n s'intende la normale ad essa in quel punto volta da una certa parte, il vettore si chiamerà anche la " pressione specifica nel punto della superficie, da quella parte ".

L'unità assoluta di quantità di pressione specifica in un punto relativa ad un raggio, conformemente alla precedente definizione, indicandola per un momento con $[p]$, deve soddisfare per le (1) a:

$$[l t^{-2} m] = [p l^2],$$

donde segue:

$$[p] = [l^{-1} t^{-2} m].$$

§ 393. — Le X_n, Y_n, Z_n si ammetterà che siano funzioni delle relative variabili finite e continue, dotate di derivate egual-

* Giova segnalare il caso che, supposto lo stato naturale, la forza limite dipendente dallo stesso corpo e dai corpi circostanti sia sensibilmente trascurabile rispetto alla forza acceleratrice di gravità, nel qual caso X_f, Y_f, Z_f saranno semplicemente le componenti di questa.

mente finite e continue; o almeno il campo decomponibile in parti, in ciascuna delle quali si verificano queste proprietà. In generale, esse dipenderanno esplicitamente dal tempo t. E potremo supporre che siano date *a priori* in funzione anche delle derivate di x, y, z rispetto a t, colla condizione che, concependole eliminate, ne risultino funzioni di x, y, z e t dotate delle prescritte proprietà.

§ 394. *Osservazione.* — Notiamo che, per le (1, § 383), si potrà sostituire nelle (1) del § 392, in ogni punto interno (x, y, z), alla forza acceleratrice limite la *corrispondente* forza acceleratrice esterna dipendente dal sistema di corpi che si ricava dal dato levando dal corpo considerato la parte cui le equazioni stesse s'intendono applicate, e per ogni punto alla superficie assumendo il limite di questa forza acceleratrice in un punto interno col tendere di esso al supposto punto della superficie (cfr. § 381).

§ 395. — La suddetta forza acceleratrice esterna non sarà altro che quella che compete alla supposta condizione fisica, in ogni punto a distanza sensibile dalla superficie della parte considerata. Che se si tratta d'un mobile tutto intero, e la sua superficie si mantiene a distanza sensibile da ogni altro corpo determinante il movimento, avrà luogo quella coincidenza per ogni suo punto. In generale, noi designeremo il vettore in discorso con $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon, Z_\varepsilon)$, e lo chiameremo la " forza acceleratrice limite esterna rispetto al mobile considerato ", corrispondente alla supposta condizione fisica; conformemente al qual termine, il corrispondente sistema di vettori applicati ai punti del mobile si chiamerà il " sistema delle forze limite esterne ".

Risultante d'un sistema di pressioni applicato ai punti d'una superficie, da una parte, e risultante dei momenti del sistema stesso rispetto ad un polo.

§ 396. — Concepita in ogni punto d'una superficie determinata la pressione specifica da una parte, concorde per tutti i punti, l'insieme dei vettori applicati definiti dalle pressioni specifiche medesime e relativi punti si chiama un sistema di pressioni

applicato ai singoli punti della superficie " da quella parte „. E conformemente a ciò, indicando al solito con σ la grandezza dell'area della superficie, con n la normale nel suo punto qualunque volta verso la parte supposta, e con X_n, Y_n, Z_n le componenti della corrispondente pressione specifica, il vettore le cui componenti sono:

$$\int X_n \, d\sigma, \qquad \int X_n \, d\sigma, \qquad \int Z_n \, d\sigma$$

si chiama la " risultante „ del sistema, o anche senz'altro la " pressione applicata alla superficie dalla parte considerata „: e quello le cui componenti sono:

$$\int (y Z_n - z Y_n) \, d\sigma, \quad \int (z X_n - x Z_n) \, d\sigma, \quad \int (x Y_n - y X_n) \, d\sigma,$$

il " risultante dei momenti „ del sistema rispetto al punto preso per origine delle coordinate come polo.

A questo secondo vettore si estendono senz' altro le proprietà del risultante dei momenti di un sistema di forze applicato ai punti di un corpo rispetto ad un polo, sostituendo al campo rappresentato dal corpo quello ch' è rappresentato dalla superficie, e la pressione specifica in ogni punto della superficie alla forza specifica in ogni punto del corpo.

In particolare, se la pressione applicata alla superficie non è nulla, e il risultante dei momenti rispetto ad un certo polo è nullo, la stessa proprietà apparterrà a tutti i punti della parallela passante per detto polo alla pressione applicata alla superficie: e questa si dirà avere tal retta per asse d'applicazione, e per punto d'applicazione ogni suo punto.

E così, se le parallele descritte pei singoli punti della superficie alla relativa pressione specifica dalla supposta parte convergono verso un punto, questo sarà punto d'applicazione della corrispondente pressione applicata alla superficie. E se le pressioni specifiche nei singoli punti da una parte sono fra loro parallele, sarà punto d'applicazione della pressione corrispondente applicata alla superficie quello le cui coordinate sono:

$$\frac{\int x p_n \, d\sigma}{\int p_n \, d\sigma}, \qquad \frac{\int y p_n \, d\sigma}{\int p_n \, d\sigma}, \qquad \frac{\int z p_n \, d\sigma}{\int p_n \, d\sigma},$$

dove p_n indica la misura della pressione specifica. Questo punto si chiama talvolta " centro di pressione ". Nel caso che anche la misura della pressione specifica sia costante, le sue coordinate si riducono a:

$$\frac{\int x\,d\sigma}{\sigma}, \qquad \frac{\int y\,d\sigma}{\sigma}, \qquad \frac{\int z\,d\sigma}{\sigma},$$

e si riduce al punto medio della superficie (§ 222).

1.ª proprietà della pressione.

§ 397. — Sia (x, y, z) un punto qualunque del corpo considerato, ed indichino n e $-n$ due raggi d'orientazione determinata e opposta, da qualunque punto sia spiccato ciascuno. Supponiamo in primo luogo il punto (x, y, z) interno, e applichiamo la prima delle (1, § 392) ad un parallelepipedo tutto compreso nel corpo con un vertice nel punto (x, y, z) e spigoli di grandezza n, n', n'', secondo il raggio n e due raggi n', n'' ortogonali ad esso e fra loro, spiccati dallo stesso punto. Decomponendo la superficie nelle sue sei faccie, abbiamo (§ 65):

$$Q\,n\,n'\,n'' = (\overline{X}_n + \overline{X}_{-n})\,n'\,n'' + (\overline{X}_{n'} + \overline{X}_{-n'})\,n''\,n + (\overline{X}_{n''} + \overline{X}_{-n''})\,n\,n',$$

dove $\overline{X}_{-n}$, $\overline{X}_{-n'}$, $X_{-n''}$, si riferiscono alle faccie opposte a quelle che contengono (x, y, z), e Q è inferiore ad un termine assegnabile.

Di qui, supponendo che n tenda a zero, mentre n', n'' restano costanti, segue, eguagliando i limiti dei due membri:

$$\overline{X}_n + \overline{X}_{-n} = 0,$$

E da questa equazione, indicando con X_n, X_{-n} i valori relativi al punto (x, y, z), ed eguagliando i limiti dei due membri col tendere di n' e n'' a zero, si conclude:

$$X_n + X_{-n} = 0. \tag{1}$$

Supposto poi il punto (x, y, z) alla superficie, indichi M' un punto interno, e rappresentino X'_n, X'_{-n} i valori delle due

funzioni relativi ad esso. Sarà, per quanto precede, con M' prossimo finchè si vuole a (x, y, z):

$$X'_n + X'_{-n} = 0.$$

E poichè, d'altra parte, col tendere di M' a (x, y, z):

$$\lim (X'_n + X'_{-n}) = X_n + X_{-n},$$

la (1) regge anche per il punto della superficie.

Concludiamo:

$$X_n + X_{-n} = 0, \quad Y_n + Y_{-n} = 0, \quad Z_n + Z_{-n} = 0:$$

cioè " le pressioni specifiche in un punto relative a due raggi opposti sono d'egual grandezza e opposta orientazione ".

2.ª proprietà della pressione.

§ 398. — Consideriamo ora un tetraedro di cui la base contiene il punto (x, y, z) ed è perpendicolare al raggio n, volto all'interno del tetraedro, e le faccie laterali concorrono in un punto di questo raggio, e sono perpendicolari, ciascuna, ad uno degli assi coordinati. Indicando con σ la grandezza dell'area della base, quella della faccia perpendicolare all'asse delle x sarà $\pm \sigma \cos (nx)$, dove va preso — o + secondo che l'angolo (nx) è ottuso o acuto. D'altra parte, rappresentando per un momento con ν il raggio orientato come la normale *interna* a questa faccia, e intendendo che x rappresenti il raggio orientato come l'asse delle x *positive*, siccome l'angolo $(n\nu)$ è ottuso, sarà $\nu = \pm x$, $X_\nu = \pm X_x$, dove va preso + o — secondo che il suddetto angolo (nx) è ottuso o acuto. Lo stesso per le altre due faccie. E perciò, immaginando la superficie del tetraedro decomposta nella base e nelle tre faccie anzidette, e applicandovi la prima delle (1, § 392), otteniamo (§ 65):

$$Q \frac{1}{3} h\sigma = \overline{X}_n \sigma - \overline{X}_x \sigma \cos (nx) - \overline{X}_y \sigma \cos (ny) - \overline{X}_z \sigma \cos (nz),$$

dove h indica l'altezza.

Di qui, dividendo per σ, ed eguagliando i limiti dei due membri collo svanire di h, con che svanisce anche la base, deduciamo senz'altro la prima delle tre:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Queste relazioni si estendono agevolmente al caso che il raggio n sia parallelo ad uno dei piani coordinati. Se è parallelo ad un asse, cioè a due di detti piani, esse si traducono nella 1.ª proprietà. Se n è parallela ad un solo piano coordinato, basta applicare il ragionamento precedente ad un prisma triangolare di cui una faccia contenga (x, y, z) e sia perpendicolare a n, le rimanenti siano parallele ai due piani ai quali n non è parallelo, e le basi siano parallele al terzo.

Esse costituiscono la proposizione fondamentale, detta talvolta del " tetraedro delle pressioni ", e forniscono per ogni punto la pressione relativa ad un raggio qualunque in termini delle pressioni relative ai tre raggi orientati come gli assi coordinati. Siccome questi sono tre assi ortogonali qualunque, così si vede come, data la pressione in un punto relativa a tre raggi fra loro ortogonali, sarà determinata per qualsivoglia raggio uscente dal punto.

3.ª proprietà della pressione.

§ 399. Introducendo le relazioni in discorso (1, § 398) nelle prime tre delle (1, § 392), e valendosi del teorema di *Gauss* (§ 68) e della proposizione generale del § 66, otteniamo immediatamente le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} k\frac{d^2x}{dt^2} &= kX_t - \frac{dX_x}{dx} - \frac{dX_y}{dy} - \frac{dX_z}{dz}, \\ k\frac{d^2y}{dt^2} &= kY_t - \frac{dY_x}{dx} - \frac{dY_y}{dy} - \frac{dY_z}{dz}, \\ k\frac{d^2z}{dt^2} &= kZ_t - \frac{dZ_x}{dx} - \frac{dZ_y}{dy} - \frac{dZ_z}{dz}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

che, per ogni punto (x, y, z), stabiliscono la relazione esistente ad ogni istante fra la densità, l'accelerazione, la forza acceleratrice limite, e la pressione specifica.

4.ª proprietà della pressione.

§ 400. — Introducendo la seconda e terza delle precedenti equazioni (1, § 399) nella quarta delle (1, § 392), e tenendo calcolo che, pel teorema di *Gauss*, hanno luogo le relazioni:

$$-\int z \frac{d Y_x}{dx} d\tau = \int z\, Y_x \cos(nx)\, d\sigma,$$

$$-\int z \frac{d Y_y}{dy} d\tau = \int z\, Y_y \cos(ny)\, d\sigma,$$

$$-\int z \frac{d Y_z}{dz} d\tau = \int z\, Y_z \cos(nz)\, d\sigma + \int Y_z\, d\tau,$$

e le analoghe, che se ne ricavano scambiando z in y e Y in Z, otteniamo, coll'aiuto delle (1, § 398):

$$\int (Y_z - Z_y)\, d\tau = 0;$$

d'onde, pel § 66, la prima delle tre:

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x; \tag{1}$$

relazioni per mezzo delle quali si riducono a sei i parametri determinanti la pressione specifica in un punto relativa ad un dato raggio qualsivoglia.

Pressioni principali.

§ 401. — Dai precedenti risultati scaturisce che in ogni punto la pressione specifica relativa ad un dato raggio, ossia l'insieme delle pressioni specifiche in ogni punto, è determinato da una terna vettoriale dipendente dal punto, i cui parametri sono:

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x.$$

Chiameremo questi parametri i “ parametri di pressione ” corrispondenti al punto.

Indichiamo con p_1, p_2, p_3, le misure delle tre quantità della terna, cioè le radici della cubica dei parametri, e con $(p_i x)$, $(p_i y)$, $(p_i z)$ gli angoli formati cogli assi coordinati dalle singole rette, prese nell'uno o nell'altro verso. Sarà, per (3)' del § 55:

$$
\begin{aligned}
p_i \cos(p_i x) &= X_x \cos(p_i x) + X_y \cos(p_i y) + X_z \cos(p_i z),\\
p_i \cos(p_i y) &= Y_x \cos(p_i x) + Y_y \cos(p_i y) + Y_z \cos(p_i z),\\
p_i \cos(p_i z) &= Z_x \cos(p_i x) + Z_y \cos(p_i y) + Z_z \cos(p_i z),\\
&(i = 1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}
$$

Quindi, per le (1, § 398):

$$X_{p_i} = p_i \cos(p_i x), \quad Y_{p_i} = p_i \cos(p_i y), \quad Z_{p_i} = p_i \cos(p_i z).$$

Per conseguenza, la pressione specifica nel punto relativa ad un raggio parallelo ad una retta della terna avrà la direzione del raggio medesimo, collo stesso senso o l'opposto secondo che la misura della quantità corrispondente è positiva o negativa, e la sua grandezza è quella della quantità medesima; che se alla pressione specifica in discorso si assegna il raggio relativo per asse, la misura della quantità sarà quella della pressione specifica medesima.

Le tre quantità si chiamano le " pressioni principali nel punto ", e le direzioni corrispondenti " direzioni principali di pressione ".

Le relazioni fra questi elementi e i parametri di pressione sono forniti senz'altro dalle (5, § 55).

§ 402. — Anche in questo caso, come in quello dello spostamento dislocatorio simmetrico estremamente piccolo (§ 102) e del momento d'inerzia (§ 279), si ricava dalla quadrica della terna vettoriale un'elegante rappresentazione geometrica. Sia, per arrivarci nel modo più spiccio, il punto considerato preso per origine degli assi coordinati, i quali siano inoltre paralleli alle direzioni principali di pressione nel punto medesimo. La superficie formata dall'insieme della quadrica della terna delle pressioni principali nel punto e da quella della terna inversa (§ 54), l'una e l'altra concepite col centro nel punto, sarà rappresentata da:

$$\frac{\xi^2}{p_1} + \frac{\eta^2}{p_2} + \frac{\zeta^2}{p_3} = \pm 1,$$

per modo che i coseni di direzione della normale nel punto ξ, η, ζ saranno proporzionali a:

$$\frac{\xi}{p_1}, \quad \frac{\eta}{p_2}, \quad \frac{\zeta}{p_3}. \tag{1}$$

D'altra parte, si ha colla stessa scelta degli assi coordinati:

$$X_n = p_1 \cos(np_1), \quad Y_n = p_2 \cos(np_2), \quad Z_n = p_3 \cos(np_3),$$

donde:

$$\cos(np_1) = \frac{X_n}{p_1}, \quad \cos(np_2) = \frac{Y_n}{p_2}, \quad \cos(np_3) = \frac{Z_n}{p_3}. \tag{2}$$

Consideriamo l'ellissoide concentrico e coassiale alle quadriche suddette la cui equazione è:

$$\frac{\xi'^2}{p_1^2} + \frac{\eta'^2}{p_2^2} + \frac{\zeta'^2}{p_3^2} = 1.$$

Potremo porre: $X_n = \xi'$, $Y_n = \eta'$, $Z_n = \zeta'$; con che la pressione specifica (X_n, Y_n, Z_n) sarà definita in grandezza e orientazione dal raggio di questo ellissoide terminato al suo punto (ξ', η', ζ'). E ciò posto, per (1), dove si intenda $\xi : \xi' = \eta : \eta' = \zeta : \zeta'$, e (2), il raggio corrispondente alla pressione specifica in discorso sarà parallelo alla normale alla superficie formata dalle due quadriche nel punto d'intersezione con quel raggio dell'ellissoide. *

Condizioni della pressione ad una superficie di discontinuità.

§ 403. — Supponiamo nel corpo considerato, al supposto istante, una superficie di discontinuità per k, o per una o più delle $X_x, \dots Y_z, \dots$, con che intenderemo che, col tendere d'un punto M del campo rappresentato dal corpo ad un punto P della superficie, quelle funzioni abbiano limite diverso secondo che M si trova da una parte o dall'altra della superficie.

Fissato il punto P, immaginiamo un intorno ω di esso nella superficie medesima, e consideriamo la parte del campo limitata

* V. *Lamé.* — *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.* — Paris, 1866 — Six.^{me} Leçon.

dalla superficie luogo degli estremi dei segmenti di grandezza ε delle normali ai punti di detto intorno, innalzate da una parte e dall'altra (basi), e dalla superficie annulare luogo dei segmenti relativi ai punti della periferia dell'intorno.

Applicando a questa parte del mobile la prima delle (1, § 392), abbiamo:

$$Q\tau = \overline{X}'_{n'}\omega' + \overline{X}''_{n''}\omega'' + R\,\omega''',$$

dove Q ed R rappresentano un valore inferiore ad un termine assegnabile fisso: τ il volume della parte: ω', ω'', ω''' le aree delle due basi e della superficie annulare: $\overline{X}'_{n'}$ e $\overline{X}''_{n''}$ la X_n per un certo punto M' di ω', dove n' è la normale volta verso l'esterno della parte, e per un certo punto M'' di ω'', dove la normale volta verso l'esterno della parte è n'' (cfr. § 397).

Collo svanire di ε, τ e ω''' svaniscono, e ω', ω'' tendono all'area ω dell'intorno considerato di P. Per quanto a $\overline{X}'_{n'}$, $\overline{X}''_{n'}$ tenderanno a certi limiti, definiti dai punti dell'intorno ai quali tendono M' e M''.

Noi ammetteremo che il limite di X_n, col tendere del relativo punto, da una parte o dall'altra, ad un punto P della superficie, e del raggio n alla normale in questo punto volta dalla stessa parte, varii con continuità al variare del punto limite della superficie.

Allora possiamo indicare i due limiti suddetti con $X'_{n'} + \alpha'$, $X''_{n''} + \alpha''$, ove $X'_{n'}, X''_{n''}$ indicano i limiti di X_n col tendere del relativo punto a P da una parte e dall'altra della superficie, e del raggio n alle normali in P verso l'una e l'altra parte, e α', α'' svaniscono collo svanire dell'intorno, per modo che i punti limiti di M' e M'' tendono a P.

Quindi, eguagliando i limiti dei due membri di (1) collo svanire di ε:

$$X'_{n'} + \alpha' + X''_{n''} + \alpha'' = 0$$

Ed eguagliando anche i limiti dei due membri di questa relazione collo svanire dell'intorno in P:

$$X'_{n'} + X''_{n''} = 0. \tag{2}$$

Indicando analogamente con $X'_x, \ldots\ Y'_z, \ldots$ e $X''_x, \ldots\ Y''_z$, i limiti di $X_x, \ldots\ Y_z, \ldots$ col tendere del punto M al punto P della superficie, da una parte e dall'altra, e con n la normale in esso punto volta dalla prima parte, la relazione ora trovata, in virtù delle (1, § 398), si può porre sotto la forma:

$$\begin{aligned} & X'_x \cos(nx) + X'_y \cos(ny) + X'_z \cos(nz) \\ = & X''_x \cos(nx) + X''_y \cos(ny) + X''_z \cos(nz). \end{aligned}$$

Teorema di d'Alembert.

§ 404. — Rappresentino al solito δx, δy, δz le componenti della velocità del punto (x, y, z) del mobile considerato, per un atto di movimento al tempo t, quale si voglia, purchè le componenti medesime siano funzioni finite e continue, insieme colle loro derivate prime rispetto a x, y, z, di queste variabili. Moltiplichiamo per δx, δy, δz ordinatamente le (1, § 399): sommiamo poi e integriamo nel campo τ, membro a membro: e trasformiamo infine l'equazione così ottenuta mediante:

$$\int \frac{dX_x}{dx}\,\delta x\, d\tau = \int \frac{dX_x\,\delta x}{dx}\, d\tau - \int X_x \frac{d\,\delta x}{dx}\, d\tau,$$

$$\int \frac{d\,X_x\,\delta x}{dx}\, d\tau = -\int X_x\,\delta x \cos(nx)\; d\sigma$$

e le analoghe relazioni. Richiamando inoltre le (1, § 398) e le (1, § 400), otteniamo l'equazione:

$$\left.\begin{aligned} \int k\left\{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X_t\right)\delta x + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y_t\right)\delta y + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - Z_t\right)\delta z\right\} d\tau = \\ \int\left(X_n\,\delta x + Y_n\,\delta y + Z_n\,\delta z\right) d\sigma + \\ \int\left\{X_x \frac{d\,\delta x}{dx} + Y_y \frac{d\,\delta y}{dy} + Z_z \frac{d\,\delta z}{dz} + \right. \\ \left. Y_z\left(\frac{d\,\delta y}{dz} + \frac{d\,\delta z}{dy}\right) + Z_x\left(\frac{d\,\delta z}{dx} + \frac{d\,\delta x}{dz}\right) + X_y\left(\frac{d\,\delta x}{dy} + \frac{d\,\delta y}{dx}\right)\right\} d\tau. \end{aligned}\right\} (1)$$

E questo si può chiamare il " teorema di *d'Alembert* „ nella forma più generale relativa alle attuali supposizioni * (cfr. § 376).

D'altra parte, il primo membro di questa equazione dev'essere eguale alla somma delle potenze delle forze applicate al corpo, le une determinate dalla sua aderenza ai corpi esterni, e le altre proprie del corpo medesimo, le quali, composte, nei singoli punti, colla forza limite, forniscono la forza effettiva. Conformemente a ciò, il secondo integrale del secondo membro si chiama la " potenza delle forze intime „ mentre il primo si chiama la " potenza delle pressioni applicate ai punti della superficie „ (cfr. §§ 384, 396).

Notiamo che, supposto l'atto di movimento del mobile considerato, o d'una sua parte, conciliabile colla rigidità, essendo:

$$\delta x = l + qz - ry, \quad \delta y = m + rx - pz, \quad \delta z = n + py - qx,$$

si ha:

$$\frac{d\delta x}{dx} = 0, \qquad \frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta z}{dy} = 0,$$

e le analoghe, per modo che ciò che abbiamo chiamato potenza delle forze intime pel mobile, o per la supposta parte, si ridurrà a zero.

Sappiamo poi che per ogni atto di movimento di un corpo conciliabile colla sua rigidità è nulla la potenza delle forze limite applicate al corpo dipendenti dal corpo medesimo, o interne, di qualunque specie siano (§ 383).

Quindi, nell'ipotesi d'un atto di movimento conciliabile colla rigidità, risulta nulla la somma di queste due potenze, la quale rappresenta appunto la potenza delle forze interne applicate al corpo (cfr. § 384).

Si conclude che, se l'atto di movimento del mobile è conciliabile colla sua rigidità, o, più generalmente, il mobile si divide in un certo numero di parti ciascuna delle quali ha atto di mo-

---

* Notiamo che questa equazione, per sè stessa, sta sotto la sola condizione che δx, δy, δz rappresentino tre funzioni delle x, y, z continue e finite, dotate di derivate parziali continue e finite.

Nella denominazione di " teorema di *d'Alembert* „ ci atteniamo al *Kirchhoff* (*Mech.* 10^{te} Vorles.), rimandando, per qualche osservazione in proposito, al capitolo seguente.

vimento conciliabile colla sua rigidità, indicando con $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon, Z_\varepsilon)$ la forza acceleratrice limite esterna rispetto alla parte cui il punto appartiene, nel punto qualunque (x, y, z) (§ 395), sarà:

$$\left.\begin{aligned}\int k\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X_\varepsilon\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y_\varepsilon\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z_\varepsilon\right)\delta z\right\}d\tau \\ =\int\left(X_n\,\delta x+Y_n\,\delta y+Z_n\,\delta z\right)d\sigma:\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

che è così la forma più generale del teorema di *d'Alembert* per un corpo cui è imposta la condizione della rigidità, e per un sistema di corpi, ognun dei quali è assoggettato a questa condizione.

Movimento relativo.

§ 405. — Concependo nelle (1, § 392) introdotte le (1, § 175) e le (1, § 201), e isolati poi nel primo membro delle relative equazioni:

$$\int k\left(\frac{d^2x_{\mathfrak{R}}}{dt^2}\right)_{t=t}d\tau, \qquad \int k\left(y\left(\frac{d^2z_{\mathfrak{R}}}{dt^2}\right)_{t=t}-z\left(\frac{d^2y_{\mathfrak{R}}}{dt^2}\right)_{t=t}\right)d\tau$$

e le analoghe espressioni, riconosceremo immediatamente che le equazioni medesime stanno egualmente pel movimento del corpo relativo ad una terna d'assi mobili, considerati come fissi, pur di surrogare dappertutto alla forza limite la risultante di essa, dell'eguale ed opposta alla forza di strascinamento (che nel caso di due assi in moto rotatorio uniforme intorno al terzo si riduce alla forza centrifuga), e della forza centrifuga composta, corrispondenti al supposto istante (§ 326).

Ne viene, richiamando il procedimento con cui abbiamo dedotto dalle (1, § 392) i precedenti risultati, che tutti quelli che non implicano direttamente la forza limite si mantengono invariati, e alle (1, § 399) si sostituiscono:

$$\left.\begin{aligned}k\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}&=k\,\mathfrak{X}_l-\frac{d\mathfrak{X}_\mathfrak{x}}{d\mathfrak{x}}-\frac{d\mathfrak{X}_\mathfrak{y}}{d\mathfrak{y}}-\frac{d\mathfrak{X}_\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}},\\ k\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}&=k\,\mathfrak{Y}_l-\frac{d\mathfrak{Y}_\mathfrak{x}}{d\mathfrak{x}}-\frac{d\mathfrak{Y}_\mathfrak{y}}{d\mathfrak{y}}-\frac{d\mathfrak{Y}_\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}},\\ k\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}&=k\,\mathfrak{Z}_l-\frac{d\mathfrak{Z}_\mathfrak{x}}{d\mathfrak{x}}-\frac{d\mathfrak{Z}_\mathfrak{y}}{d\mathfrak{y}}-\frac{d\mathfrak{Z}_\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}},\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove $\mathfrak{X}_t$, $\mathfrak{Y}_t$, $\mathfrak{Z}_t$ rappresentano le componenti della risultante della forza acceleratrice limite, dell'eguale ed opposta alla forza acceleratrice di strascinamento, e della forza acceleratrice centrifuga composta corrispondenti al tempo t, nel punto considerato, rispetto a una terna d'assi aventi l'orientazione degli assi mobili al tempo t medesimo: e del resto ogni lettera gotica ha rispetto a questi assi il significato della corrispondente latina rispetto agli assi fissi.

§ 406. — Atto di movimento virtuale relativo a una terna d'assi mobili considerati come fissi s'intende un atto di movimento corrispondente al movimento relativo medesimo conciliabile coi vincoli quali sono per rispetto agli assi mobili. Per esempio, il vincolo d'un punto che serba rispetto agli assi mobili posizione invariata, imposto al movimento assoluto, si traduce pel movimento relativo in quello del punto fisso.

Indichino $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$ le componenti secondo gli assi aventi l'orientazione degli assi mobili al tempo t della velocità del punto qualunque del mobile per un suo atto di movimento virtuale relativo agli assi medesimi, quale si voglia, purchè $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$ risultino funzioni continue e finite delle coordinate, insieme colle loro derivate prime. Scaturisce dalle (1) del precedente §, col procedimento del § 404: *

$$\left.\begin{aligned}&\int k\left\{\left(\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}-\mathfrak{X}_t\right)\delta\mathfrak{x}+\left(\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}-\mathfrak{Y}_t\right)\delta\mathfrak{y}+\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}-\mathfrak{Z}_t\right)\delta\mathfrak{z}\right\}d\tau\\&\quad=\int(\mathfrak{X}_n\delta\mathfrak{x}+\mathfrak{Y}_n\delta\mathfrak{y}+\mathfrak{Z}_n\delta\mathfrak{z})\,d\sigma+\\&\quad\int\left(\mathfrak{X}_\mathfrak{x}\frac{d\delta\mathfrak{x}}{d\mathfrak{x}}+\mathfrak{Y}_\mathfrak{y}\frac{d\delta\mathfrak{y}}{d\mathfrak{y}}+\mathfrak{Z}_\mathfrak{z}\frac{d\delta\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}}+\right.\\&+\left.\mathfrak{Y}_\mathfrak{z}\left(\frac{d\delta\mathfrak{y}}{d\mathfrak{z}}+\frac{d\delta\mathfrak{z}}{d\mathfrak{y}}\right)+\mathfrak{Z}_\mathfrak{x}\left(\frac{d\delta\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}+\frac{d\delta\mathfrak{x}}{d\mathfrak{z}}\right)+\mathfrak{X}_\mathfrak{y}\left(\frac{d\delta\mathfrak{x}}{d\mathfrak{y}}+\frac{d\delta\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)\right)d\tau\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

che rappresenta la forma più generale del teorema di *d'Alembert* pel movimento relativo.

Che se l'atto di movimento si suppone conciliabile colla

* Sta qui la stessa osservazione della nota al § 404.

rigidità del mobile, o il mobile composto di un certo numero di parti il cui atto di movimento è per ciascuna conciliabile colla sua rigidità, — circostanza che, se si verifica pel movimento assoluto, avrà luogo pel relativo, e viceversa — indicando con $(\mathfrak{X}_\varepsilon, \mathfrak{Y}_\varepsilon, \mathfrak{Z}_\varepsilon)$ la risultante della forza acceleratrice limite esterna *per rispetto alla parte cui il punto appartiene*, corrispondente alla supposta condizione fisica (§ 395), dell'eguale ed opposta alla forza acceleratrice di strascinamento, e della forza acceleratrice centrifuga composta corrispondenti al tempo t, abbiamo semplicemente:

$$\left.\begin{array}{c}\int k\left\{\left(\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}-\mathfrak{X}_\varepsilon\right)\delta\mathfrak{x}+\left(\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}-\mathfrak{Y}_\varepsilon\right)\delta\mathfrak{y}+\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}-\mathfrak{Z}_\varepsilon\right)\delta\mathfrak{z}\right\}d\tau= \\ \int(\mathfrak{X}_n\,\delta\mathfrak{x}+\mathfrak{Y}_n\,\delta\mathfrak{y}+\mathfrak{Z}_n\,\delta\mathfrak{z})\,d\sigma.\end{array}\right\} \quad (2)$$

§ 407. — Si riconoscerà agevolmente come la (1, § 406) scaturisca direttamente dalla (1, § 404), mediante le (1, § 201), e le:

$$\left.\begin{array}{l}\delta x=\alpha_1\,\delta\mathfrak{x}+\alpha_2\,\delta\mathfrak{y}+\alpha_3\,\delta\mathfrak{z}, \\ \delta y=\beta_1\,\delta\mathfrak{x}+\beta_2\,\delta\mathfrak{y}+\beta_3\,\delta\mathfrak{z}, \\ \delta z=\gamma_1\,\delta\mathfrak{x}+\gamma_2\,\delta\mathfrak{y}+\gamma_3\,\delta\mathfrak{z}.\end{array}\right\} \quad (1)$$

Queste relazioni stabiliscono che una velocità virtuale rispetto agli assi mobili, lo è anche rispetto agli assi fissi. Ciò che collima colla convenzione che, nel caso di vincoli variabili col tempo, la velocità virtuale ad un istante va calcolata nell'ipotesi che i vincoli si mantengano nello stato di quell'istante (§ 180); donde segue che, pel calcolo della velocità virtuale, ogni vincolo conta egualmente rispetto agli assi mobili e agli assi fissi.

CAPITOLO III.

CORPI RIGIDI VINCOLATI.

Pressioni vincolari.

§ 408. — Consideriamo un sistema di corpi rigidi, a ciascun dei quali possa essere imposta anche qualche condizione, oltre quella dell'invariabilità. Immaginato uno qualunque di essi, potremo concepire un sistema di pressioni applicato ai punti della sua superficie, il cui ufficio, conformemente ai principii suesposti, sarà di tradurre l'effetto dei corpi a contatto. Ora, si potranno dare due casi. Queste pressioni, o per lo meno i risultanti di esse e loro momenti rispetto ad un punto, potranno essere dati *a priori*, più o meno direttamente, non altrimenti che le forze limite o i relativi risultanti; nel qual caso diremo " pressioni prestabilite „ o " preventivamente date „. E si potrà invece prestabilire una condizione della superficie, e, ammesso che vi corrisponda un sistema di pressioni, intendere che debba essere dedotto dalla condizione medesima.

Osserviamo a questo proposito, che le supposizioni che più comunemente si fanno insieme con quella della rigidità dei corpi si possono agevolmente comprendere sotto la qualità comune di condizioni a cui si assoggetta la superficie, o parte di essa, per mantenere l'aderenza a certi " sostegni „, o conservare una certa connessione fra le parti, ciò che si può immaginare conseguito per mezzo d'opportuni " legami „.

Ciò è senz'altro della condizione che la superficie d'un corpo sia obbligata a toccare una superficie fissa: o, formando la superficie d'una cavità sferica o cilindrica circolare, a scorrere applicata ad un'egual superficie fissa. Dai quali casi si deduce quello d'un punto fisso, e d'una retta fissa, passando al limite collo svanire del raggio; e sarà ammesso che esistano i limiti simili dei risultanti delle pressioni e loro momenti rispetto ad un punto, designati cogli stessi nomi.

§ 409. — Chiameremo " vincolo geometrico „ d'un corpo rigido ogni condizione per la quale vien limitata la generalità dell'atto di movimento virtuale del corpo rigido medesimo; per modo che, posto:

$$\delta x = l' + q'z - r'y, \quad \delta y = m' + r'x - p'z, \quad \delta z = n' + p'y - q'x,$$

indicando al solito con $(\delta x, \delta y, \delta z)$ la velocità virtuale del punto occupante il posto (x, y, z) al considerato istante, risulti comunque limitata la scelta dei valori dei parametri l', m', n', p', q', r'.

Qualunque sia un vincolo geometrico, noi ammetteremo l'esistenza, per ogni corpo, dei risultanti d'un corrispondente sistema di pressioni e loro momenti rispetto ad un punto; indicando i quali con $(\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}')$ e $(\mathrm{M}'_x, \mathrm{M}'_y, \mathrm{M}')$, l'espressione:

$$\mathrm{X}'l' + \mathrm{Y}'m' + \mathrm{Z}'n' + \mathrm{M}'_x p' + \mathrm{M}'_y q' + \mathrm{M}'_z r'$$

sarà la misura della potenza del sistema di pressioni medesime corrispondente ad un atto di movimento virtuale.

Consideriamo, più in generale, un sistema di corpi rigidi. Si dirà un vincolo geometrico del sistema ogni vincolo geometrico che concerne i singoli corpi, e intenderemo per atto di movimento virtuale del sistema ogni suo atto di movimento conciliabile con quel vincolo.

Ciò posto, stabiliamo, come carattere comune, che " per ogni atto di movimento d'un sistema di corpi rigidi conciliabile con un vincolo geometrico, la potenza del complesso dei sistemi di pressioni corrispondenti al vincolo medesimo, applicati ai singoli corpi, avrà valor zero „. Cioè, coi precedenti simboli, e intendendo che la sommatoria abbracci i singoli corpi:

$$\Sigma\,(\mathrm{X}'l' + \mathrm{Y}'m' + \mathrm{Z}'n' + \mathrm{M}'_x p' + \mathrm{M}'_y q' + \mathrm{M}'_z r') = 0. \quad (1)$$

§ 410. — Avvertiamo che il meccanismo per mezzo del quale un vincolo geometrico si concepisce realizzato (sostegni, fili, spranghe), si suppone ordinariamente — salvo affermare il contrario — che non contribuisca sensibilmente alla forza limite del corpo vincolato; ciò che si esprime colla frase che il meccanismo stesso si tratta come privo di massa.

§ 411. — Pel caso del movimento relativo ed una terna d'assi mobili considerati come fissi, osserviamo che dalla (1, § 410), intesa applicata al movimento assoluto, segue la relazione analoga rispetto al movimento relativo, poichè, in ogni caso, una velocità virtuale rispetto agli assi mobili, lo è anche rispetto agli assi fissi, e viceversa (cfr. § 408).

Teorema di d'Alembert.

§ 412. — Abbiasi un sistema di corpi rigidi, il cui movimento sia determinato cól concorso di certi vincoli geometrici. Richiamando (2, § 405), e intendendo che (X_n, Y_n, Z_n) si riferiscano alle pressioni preventivamente date, abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} k\int\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X_e\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y_e\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z_e\right)\delta z\right\}d\tau \\ -\int(X_n\,\delta x+Y_n\,\delta y+Z_n\,\delta z)\,d\sigma=0, \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

per ogni atto di movimento virtuale. Che se addottiamo il linguaggio del § 376, quest'equazione si traduce nella proposizione che " ad ogni istante, si fanno equilibrio il sistema delle forze d'inerzia, applicato ai punti del sistema, e quelli delle forze limite esterne rispetto ad ogni corpo, applicato agli stessi punti, e delle pressioni preventivamente date, applicato ai punti della sua superficie " — in altre parole: " si fanno equilibrio ad ogni istante il sistema delle forze d'inerzia e quelli delle forze e pressioni determinate indipendentemente dai vincoli geometrici prefissati " *.

* Tale è in sostanza la celebre proposizione di *d'Alembert*, che raccoglie sotto un solo principio i problemi del movimento e dell'equilibrio. L'equazione (1) riunisce il " principio di *d'Alembert* " con quello delle " velocità virtuali " (cfr. § 374) scoperto in casi particolari da *Stevin* e da *Galileo*, e in via generale enunciato per la prima volta da *Giovanni Bernoulli;* e fu stabilita da *Lagrange*, donde il termine " equazione di *Lagrange* ", o " di *d'Alembert* e *Lagrange* ", usata da diversi autori.

Questo costituisce, nel caso in discorso, il teorema di *d'Alembert*; il quale regge così nella stessa forma che pei corpi rigidi liberi, bastando di surrogare al sistema delle forze esterne rispetto a ciascun corpo, quello delle forze limite esterne e pressioni prestabilite, che ha un analogo significato. Ciò che permette d'estendere agevolmente alcuni risultati che abbiamo da esso precedentemente ricavato.

§ 413. — Poniamo (cfr. § 158):

$$\int k\, X_e\, d\tau + \int X_n\, d\sigma = \mathrm{X},$$

$$\int k\,(y\, Z_e - z\, Y_e)\, d\tau + \int (y\, Z_n - z\, Y_n)\, d\sigma = \mathrm{M}_x$$

$$(x, y, z)\ (X, Y, Z)\ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$

per modo che $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ $(\mathrm{M}_x, \mathrm{M}_y, \mathrm{M}_z)$ siano, per uno qualunque dei corpi del sistema, i risultanti del sistema delle forze e pressioni determinate preventivamente, e loro momenti rispetto al punto assunto come origine delle coordinate. La precedente equazione potrà porsi sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\Big\{&\left(\int k\,\frac{d^2x}{dt^2}\,d\tau - \mathrm{X}\right)l' + \left(\int k\,\frac{d^2y}{dt^2}\,d\tau - \mathrm{Y}\right)m' + \left(\int k\,\frac{d^2z}{dt^2}\,d\tau - \mathrm{Z}\right)n' \\ &+\left(\int k\left(y\,\frac{d^2z}{dt^2} - z\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)d\tau - \mathrm{M}_x\right)p' \\ &+\left(\int k\left(z\,\frac{d^2x}{dt^2} - x\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)d\tau - \mathrm{M}_y\right)q' \\ &+\left(\int k\left(x\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2x}{dt^2}\right)d\tau - \mathrm{M}_z\right)r' = 0,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove, rammentiamo, indicando con $(\delta x, \delta y, \delta z)$ la velocità del punto occupante al tempo t il posto (x, y, z), è:

$$\begin{aligned}\delta x &= l' + q'z - r'y,\\ \delta y &= m' + r'x - p'z,\\ \delta z &= n' + p'y - q'x,\end{aligned}$$

con $l', \ldots p', \ldots$ costanti in ogni parte rigida, e la sommatoria comprende tutte le parti rigide del sistema considerato.

Equazioni pure del movimento.

§ 414. — Per ogni corpo, che fa parte di un sistema di corpi rigidi, come fu precedentemente considerato, abbiamo le sei equazioni:

$$\int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \mathbf{X} + \mathbf{X}', \tag{1}$$

$$\int k \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) d\tau = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}'_x, \tag{2}$$

$$(x, y, z) \qquad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}),$$

dove i simboli conservano tutti il significato precedente.

I primi membri di queste equazioni, salvo esaminarne attentamente la forma più opportuna nei singoli casi, per le relazioni del § 21, che collegano x, y, z colle coordinate di un punto del corpo e i coseni di direzione di una terna d'assi invariabilmente unite col corpo, legati questi ultimi, dalle formole del § 24, cogli angoli φ, f, θ individuanti l'orientazione di detta terna, risultano funzioni intere dei coefficienti differenziali primi e secondi di queste variabili rispetto al tempo.

Le $\mathbf{X}, \ldots \mathbf{M}_x, \ldots$ s'intenderanno nel caso più generale funzioni del tempo t esplicito *, delle variabili suddette, relative, non solo al corpo in discorso, ma anche a tutti gli altri che compongono il sistema, e dei loro coefficienti differenziali primi rispetto al tempo. Questa ipotesi, che risulta necessaria e sufficiente per la trattazione dei problemi che offre l'esperienza, conduce, come si vedrà, a stabilire in ogni caso un sistema d'equazioni differenziali ordinarie del 2.° ordine, dove il tempo funge da variabile indipendente, e le variabili individuanti la posizione rappresen-

* Ove nascesse l'idea d'una contraddizione col principio che la forza motrice è determinata dalla posizione dei corpi considerati, riflettasi che, nelle attuali ipotesi, il mobile si dovrà talvolta intendere come una parte d'un sistema più complesso il cui movimento è incognito; ignoranza alla quale si supplisce coll'introduzione della pressione alla superficie.

tano le incognite; in conseguenza di che il movimento riesce in ultima analisi determinato dal sistema delle forze limite esterne e delle pressioni prestabilite, coll'aggiunta della posizione e dell'atto di movimento ad un istante, che servono per fissare i valori delle costanti d'integrazione.

Restano $\mathbf{X}', \ldots \mathbf{M}'_x, \ldots$ che si devono intendere determinate dai vincoli, col sussidio dell'equazione caratteristica del § 409.

§ 415. — Ogni equazione differenziale conciliabile col complesso delle (1, 2, § 414) relative a tutti i corpi del sistema, e del 2.° ordine, la quale non includa le $\mathbf{X}', \ldots \mathbf{M}'_x, \ldots$ si chiamerà un' " equazione pura del movimento del sistema ".

Stabilito un sistema di queste equazioni fra loro indipendenti, in numero sufficiente, perchè, col concorso dei vincoli prestabiliti, e in base alle circostanze iniziali — posizione ed atto di movimento ad un istante — ne venga determinato il complesso delle variabili individuanti la posizione dei singoli corpi in funzione del tempo, questo sarà il " sistema delle equazioni pure del movimento ", sufficiente per determinare il movimento considerato.

§ 416. — In seguito, le (1, 2, § 414) forniranno senz'altro:

$$\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}', \qquad \mathbf{M}'_x, \mathbf{M}'_y, \mathbf{M}'_x$$

§ 417. — La formazione delle equazioni pure richiede un procedimento particolare nei diversi casi, il quale però si fonda costantemente sul teorema di *d'Alembert*; donde la grande importanza di questo teorema. Infatti, esse si ricavano dall'equazione (1, § 413), applicandola ad una successione d'atti di movimento virtuali del sistema, per ciascuno dei quali si converte in un'equazione differenziale della specie richiesta.

§ 418. — Siano, per esempio, i vincoli tali che, ad ogni istante del considerato intervallo di tempo, è atto di movimento virtuale del sistema quello per cui la velocità dei punti d'alcuni corpi è nulla, e il gruppo dei rimanenti è in atto traslatorio secondo un certo asse.

Assunto tale asse per asse delle x, potremo supporre zero le $l', \ldots p', \ldots$ per tutti i corpi, all'infuori di quelli del gruppo, pei quali attribuiremo a l' un valore comune diverso da zero,

mentre i rimanenti parametri avranno valor zero, come pei rimanenti. E con ciò la (1, § 413) si riduce a:

$$l' \Sigma' \left(\int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau - \mathbf{X} \right) = 0;$$

donde:

$$\Sigma' \int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \Sigma' \mathbf{X},$$

intendendo che Σ' si estenda ai corpi del gruppo.

Si dice in questo caso che il movimento del gruppo soddisfa il teorema del centro di massa " secondo il supposto asse " (cfr. § 252). Che se è $\Sigma' \mathbf{X} = 0$, scaturiscono dalla precedente le due equazioni integrali:

$$\Sigma' \int k \frac{dx}{dt} d\tau = \alpha, \qquad \Sigma' \int k\, x\, d\tau = a + \alpha t,$$

e si dice che il movimento del gruppo soddisfa il teorema della conservazione del centro di massa, parimente " secondo il supposto asse " (cfr. § 253).

§ 419. — Così pure, sia atto di movimento virtuale ad ogni istante quello per cui certi corpi hanno in ogni punto velocità nulla, e il gruppo dei rimanenti è in atto rotatorio, con un certo asse per asse istantaneo.

Troveremo analogamente, assunto l'asse medesimo per asse delle x:

$$\Sigma' \int k \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) d\tau = \Sigma' \mathbf{M}_x.$$

Si dice in questo caso che il movimento del gruppo soddisfa il teorema delle aree " secondo il supposto asse ", o anche " nel piano orientato corrispondente ": e se è $\Sigma' \mathbf{M}_x = 0$, per modo che abbiasi l'equazione integrale:

$$\Sigma' \int k \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) d\tau = A,$$

che il movimento medesimo soddisfa, " secondo il supposto asse, " o " nel corrispondente piano orientato ", il teorema della conservazione delle aree. (Cfr. §§ 310, 312.)

§ 420. — In terzo luogo, ogniqualvolta l'atto di movimento effettivo ad ogni istante è atto di movimento virtuale all'istante medesimo, la (1, § 413) fornisce (cfr. §§ 269, 303):

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma\,(\mathbf{X}\,l + \mathbf{Y}\,m + \mathbf{Z}\,n + \mathbf{M}_x\,p + \mathbf{M}_y\,q + \mathbf{M}_z\,r),$$

ch'è anche un'equazione pura del movimento; e si verifica il teorema della forza viva.

Sotto altra forma, si ha in questo caso:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dT}{dt} = \int k\left(X_\varepsilon\frac{dx}{dt} + Y_\varepsilon\frac{dy}{dt} + Z_\varepsilon\frac{dz}{dt}\right)d\tau &+ \\ + \int\left(X_n\frac{dx}{dt} + Y_n\frac{dy}{dt} + Z_n\frac{dz}{dt}\right)d\sigma&,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}T - T_0 = \int_{t_0}^{t} dt\int k\left(X_\varepsilon\frac{dx}{dt} + Y_\varepsilon\frac{dy}{dt} + Z_\varepsilon\frac{dz}{dt}\right)d\tau &+ \\ + \int_{t_0}^{t} dt\int\left(X_n\frac{dx}{dt} + Y_n\frac{dy}{dt} + Z_n\frac{dz}{dt}\right)d\sigma&;\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

e la quantità di cui è misura il secondo termine del secondo membro si chiama nella (1) " la potenza del sistema delle pressioni prestabilite, applicato ai punti della superficie del mobile considerato corrispondente al supposto atto di movimento " e nella (2) il " lavoro " del sistema stesso " corrispondente al movimento dalla posizione al tempo t_0 alla posizione al tempo t " (cfr. §§ 263, 270, 404).

Nell'ipotesi che il secondo membro sia eguale all'incremento d'una funzione W della posizione del mobile, e cioè delle variabili atte a individuarne la posizione subordinatamente ai supposti vincoli, poichè basta occuparsi di queste, la funzione in discorso si chiamerà il potenziale delle forze e pressioni prestabilite, e si dirà che il movimento soddisfa il teorema della conservazione dell'energia (cfr. § 285); mentre la relativa equazione:

$$T - W = Cost.$$

sarà un'equazione integrale.

§ 421. — Notiamo, riguardo a quest'ultima ipotesi, il caso cospicuo del movimento determinato da vincoli geometrici indipendenti dal tempo, e dalla gravità; il quale verificherà il teorema della conservazione dell'energia sotto la forma:

$$T + G\zeta = Cost.$$

dove G indica il peso del sistema, ζ la grandezza della distanza del piano perpendicolare al filo a piombo su cui trovasi il centro di massa al tempo t dall'analogo piano più basso, che raggiunge nel corso del movimento (cfr. § 285), o, se piace, che può raggiungere subordinatamente ai vincoli. *

Equilibrio.

§ 422. — Supponiamo i vincoli invariabili col tempo; oltre di che, per ogni corpo del sistema, le $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ non involgenti direttamente il tempo, nè le derivate rispetto al tempo dei parametri individuanti la posizione dei singoli corpi, ma, in generale, funzioni di questi soli parametri. E in tale ipotesi il sistema considerato sia, in un intervallo di tempo, in equilibrio.

§ 423. — Le (1, 2, 414) si riducono in questo caso a:

$$\mathbf{X} + \mathbf{X}' = 0, \qquad \mathbf{M}_x + \mathbf{M}'_x = 0,$$
$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \qquad (x, y, z)$$

esprimenti che i risultanti delle pressioni vincolari e loro momenti rispetto ad un punto sono, per ogni corpo, eguali e di senso opposto ai risultanti corrispondenti relativi al sistema delle forze esterne limite e pressioni prestabilite.

* È chiaro che dell'energia potenziale sono essenziali le differenze; per modo che il valor fisso del potenziale da cui si sottrae il valor corrente per definire quello dell'energia potenziale (§ 285) si può scegliere con diversi criterii. Quando ad una posizione conciliabile coi vincoli corrisponde il massimo valore del potenziale, subordinato ai vincoli medesimi, giova spesso scegliere questo valore.

§ 424. — In secondo luogo, le (1, § 412), (1, § 413) si riducono in questo caso a:

$$\int k(X_t\,\delta x + Y_t\,\delta y + Z_t\,\delta z)\,d\tau + \int (X_n\,\delta x + Y_n\,\delta y + Z_n\,\delta z)\,d\sigma = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma\,(\mathrm{X}\,l' + \mathrm{Y}\,m' + \mathrm{Z}\,n' + \mathrm{M}_x\,p' + \mathrm{M}_y\,q' + \mathrm{M}_z\,r') = 0, \quad (1)'$$

alle quali relazioni concependo applicati i precedenti processi, si otterranno le " equazioni pure dell'equilibrio ", atte a determinare i valori dei parametri che convengono alle " posizioni d'equilibrio " del sistema considerato (§ 324).

Ora, come al § 374, potrà darsi che queste equazioni determinino uno o più gruppi discreti di valori dei parametri rappresentanti altrettante posizioni d'equilibrio distinte; nel qual caso le equazioni in discorso, inteso che si verifichino in tutto l'intervallo di tempo, sono anche condizioni sufficienti per l'equilibrio considerato. Oppure potranno le equazioni medesime conciliarsi con un insieme continuo di posizioni: per esempio, con tutte le posizioni d'uno o più corpi compatibili coi vincoli; e in questo caso sarà inoltre condizione necessaria e sufficiente che, ad un istante dell'intervallo, la forza viva di quei corpi di cui la posizione non risulta fissata sia nulla.

Infatti, ogni effettivo movimento del sistema, essendo i vincoli indipendenti dal tempo, deve soddisfare il teorema della forza viva (§ 420); e questo, nell'ipotesi che siano soddisfatte le equazioni d'equilibrio, siccome ne segue (1), si riduce a:

$$T = Cost.$$

per modo che condizione supplementare necessaria e sufficiente perchè un corpo qualunque del sistema abbia forza viva costantemente nulla, cioè sia immobile, resta che la forza viva del corpo, nella supposta posizione d'equilibrio, sia nulla ad un istante.

L'equazione (1) traduce nel caso in discorso d'un sistema vincolato il " teorema delle velocità virtuali " (§ 374).* Nell'ipotesi che esista il potenziale W, conformemente a quanto s'è visto nel § 374, essa si riduce a:

$$\delta W = 0,$$

* Cfr. la nota al § 412.

ove la variazione è subordinata, non solo alla rigidità dei singoli corpi, ma altresì ai vincoli imposti al sistema.

Nella stessa ipotesi, ogni posizione per la quale il potenziale W, *subordinatamente a quelle condizioni*, riceve valor massimo, sarà una posizione d'equilibrio stabile (§ 325, 375).

Intorno alle condizioni iniziali occorrenti perchè, in una posizione d'equilibrio qualsivoglia, il mobile si mantenga fisso, reggono le considerazioni relative all'equilibrio dei corpi liberi (§ 374).

Vincoli che si traducono in equazioni lineari fra i parametri della velocità. 1.° Metodo.

§ 425. — Supponiamo che, i corpi componenti il sistema essendo in numero di ν, si possano stabilire, in base ai vincoli, μ equazioni lineari fra i 6ν parametri $l', \ldots p', \ldots$ relativi a tutti i corpi, atte a determinarne μ in funzione dei rimanenti. Questi riusciranno arbitrarii; per modo che, concepito dalla (1, § 413) eliminati i primi, e l'equazione così ottenuta ordinata rispetto ai secondi, si potrà successivamente supporre che tutti questi abbiano valor zero all'infuori di uno, ciò che fornirà, eguagliando a zero il suo coefficiente, altrettante equazioni pure del movimento, e cioè $6\nu - \mu$.

Altre μ equazioni fra le variabili determinanti il movimento del sistema potranno concepirsi deducibili dai vincoli, come le supposte fra i parametri delle velocità. Che se queste sono applicabili all'atto di movimento effettivo, formeranno senz'altro μ equazioni fra le $l, \ldots p, \ldots$ — così, al solito, indicando i parametri della velocità in tal caso — quali si richiedono per completare il sistema. Notiamo che i parametri eliminati risultando funzioni lineari dei rimanenti, le suddette equazioni si potranno mettere necessariamente sotto la forma:

$$\Sigma_i \left\{ \left(\int_{\tau_i} k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau_i - \mathbf{X}_i \right) L_i + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{\tau_i} k \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) d\tau_i - \mathbf{M}_{ix} \right) P_i + \ldots \right\} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots \nu)$$

dove il termine scritto concerne il corpo i^{mo}, e $L_i, \ldots P_i, \ldots$ sono costanti rispetto ai punti del corpo medesimo. E questa equazione non è che la (1, § 413), ossia la (1, § 412), applicata all'atto di movimento pel quale le componenti della velocità del punto x, y, z del corpo i^{mo} sono:

$$L_i + Q_i z - R_i y, \quad M_i + R_i x - P_i z, \quad N_i + P_i y - Q_i x;$$

il quale, riuscendo soddisfatte le supposte equazioni lineari, è atto di movimento virtuale (cfr. § 417).

Vedremo in seguito un metodo simmetrico per rispetto ai singoli parametri. Con questo, la scelta di quelli che giova eliminare e mantenere dipende dalla opportunità dei singoli casi particolari.

Un corpo con un punto fisso.

§ 426. — Supposto un punto fisso, indicandone le coordinate con a, b, c, si hanno subito le tre equazioni pure del movimento:

$$\left.\begin{aligned}
\int k\left((y-b)\frac{d^2z}{dt^2}-(z-c)\frac{d^2y}{dt^2}\right)d\tau &= \mathbf{M}_x + c\mathbf{Y} - b\mathbf{Z},\\
\int k\left((z-c)\frac{d^2x}{dt^2}-(x-a)\frac{d^2z}{dt^2}\right)d\tau &= \mathbf{M}_y + a\mathbf{Z} - c\mathbf{X},\\
\int k\left((x-a)\frac{d^2y}{dt^2}-(y-b)\frac{d^2x}{dt^2}\right)d\tau &= \mathbf{M}_z + b\mathbf{X} - a\mathbf{Y},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sia notando che il vincolo è conciliabile con ogni atto di movimento rotatorio il cui asse passi pel punto fisso (§ 419); e sia, col metodo generale del § 425, partendo dalle equazioni:

$$l' + q'c - r'b = 0, \quad m' + r'a - p'c = 0, \quad n' + p'b - q'a = 0,$$

esprimenti che è nulla ad ogni istante la velocità del punto (a, b, c).

Il punto fisso intendendosi dato, basterà determinare in funzione del tempo gli angoli φ, θ, f, che individuano la posizione della terna degli assi coordinati $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, formata cogli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso.

Indichiamo con P, Q, R le grandezze dei corrispondenti momenti principali d'inerzia, con α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$) i loro coseni di direzione rispetto ai supposti assi fissi, con $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ le componenti della velocità angolare del corpo al tempo t secondo una terna avente la loro orientazione al tempo medesimo. Finalmente, rappresentiamo con M_x, M_y, M_z le componenti secondo gli assi fissi del risultante dei momenti del sistema delle forze esterne limite e di quello delle pressioni prestabilite rispetto al punto fisso come polo. Con ciò le (1) acquisteranno senz'altro la forma (§ 308):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(P\mathfrak{p}\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\alpha_2 + R\mathfrak{r}\alpha_3)}{dt} &= \mathrm{M}_x, \\ \frac{d(P\mathfrak{p}\beta_1 + Q\mathfrak{q}\beta_2 + R\mathfrak{r}\beta_3)}{dt} &= \mathrm{M}_y, \\ \frac{d(P\mathfrak{p}\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\gamma_2 + R\mathfrak{r}\gamma_3)}{dt} &= \mathrm{M}_z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

E da ciò, col procedimento adoperato per ricavare le (2)'' del § 350 dalle (2)', si deduce il sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} P\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - (Q - R)\,\mathfrak{q}\mathfrak{r} &= \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}, \\ Q\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - (R - P)\,\mathfrak{r}\mathfrak{p} &= \mathfrak{M}_{\mathfrak{y}}, \\ R\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - (P - Q)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q} &= \mathfrak{M}_{\mathfrak{z}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dove $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{y}}$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{z}}$ rappresentano le componenti del suddetto risultante dei momenti secondo una terna avente l'orientazione di quella formata cogli assi principali d'inerzia, al tempo t.

Così, pel § 350, " a parità di risultante dei momenti delle forze e pressioni, rispetto, secondo il caso, al centro di massa o ad un punto fisso, il movimento d'un corpo rigido non assoggettato ad alcun vincolo geometrico, relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio, coll'origine nel centro di massa — ossia il componente polare del movimento rispetto al centro di massa — e il movimento assoluto nell'ipotesi d'un punto fisso, si deducono l'un dall'altro sostituendo, l'uno all'altro, il centro di massa e il punto fisso ".

§ 427. — In particolare, si ha il " movimento per inerzia d'un corpo rigido avente un punto fisso " nell'ipotesi che sia nullo il risultante dei momenti delle forze esterne limite e pressioni prestabilite rispetto al punto fisso. E questo movimento si deduce immediatamente, con quel principio, dal componente polare rispetto al centro di massa del movimento per inerzia d'un corpo rigido libero (§§ 354-363).

§ 428. — Le equazioni d'equilibrio, conformemente al (§ 424), sono:

$$\mathbf{M}_x = b\mathbf{Z} - c\mathbf{Y}, \quad \mathbf{M}_y = c\mathbf{X} - a\mathbf{Z}, \quad \mathbf{M}_z = a\mathbf{Y} - b\mathbf{X};$$

le quali si traducono nella condizione che la risultante delle forze esterne limite e delle pressioni prestabilite abbia il punto fisso per punto d'applicazione.

§ 429. — Ne viene, nell'ipotesi dell'equilibrio determinato da un punto fisso e dalla gravità, che il centro di massa si deve trovare sulla parallela al filo a piombo passante pel punto fisso; condizione che, se il centro di massa coincide col punto fisso, è soddisfatta da tutte le posizioni possibili del corpo, e diversamente da tutte quelle che si deducono da una con una rotazione intorno alla parallela in discorso come asse, ciò che fornisce — essendo data la distanza del centro di massa dal punto fisso — due insieme continui di posizioni d'equilibrio, pei quali il centro di massa è rispettivamente *sotto* e *sopra* del punto fisso. Per conseguenza, in ogni caso, le equazioni d'equilibrio costantemente verificate non sono condizione sufficiente; e condizione necessaria e sufficiente è di più che la forza viva ad un istante sia nulla.

Nello stesso caso, siccome la gravità ammette il potenziale $G\bar{z}$, dove G e z indicano le misure del peso del corpo, e del segmento d'asse orientato come il filo a piombo compreso fra il posto del centro di massa, nella supposta posizione, e il piano perpendicolare all'asse medesimo passante pel punto fisso — la qual funzione, sotto la condizione che sia prefissata la distanza fra il centro di massa e il punto fisso, soddisfa a $\delta G z = 0$ pel valor massimo e minimo di z subordinato a quella condizione, che corrisponde alle due posizioni del centro di massa sulla

suddetta parallela — si ritrova che posizioni d'equilibrio saranno quelle per cui il centro di massa occupa tali posizioni; oltre di che si riconosce che la prima posizione è d'equilibrio stabile.

§ 430. — Concepita determinata per ogni istante la posizione del corpo mediante le precedenti equazioni, le (1, § 414) forniscono la risultante delle pressioni vincolari, ciò che si chiama la " reazione del punto fisso „: la quale, per le (2, § 414) risulta avere in ogni caso il punto fisso per punto d'applicazione. E immaginando, invece del punto, una sfera resistente colla cui superficie combacia quella d'una cavità sferica del corpo, si vede come questo segua immediatamente dall'ipotesi che la pressione relativa ad ogni punto della superficie sia diretta secondo il raggio: cioè normale alla superficie resistente.

Un corpo con una retta fissa (o due punti fissi).

§ 431. — Supposta fissa una retta del corpo — vincolo al quale si riduce senz'altro quello di due punti fissi — indicando con a, b, c le coordinate d'un suo punto qualsivoglia, e con α, β, γ i suoi coseni di direzione (scelto il senso in un certo modo), abbiamo l'equazione pura del movimento:

$$\int k \left\{ \left((y-b)\frac{d^2 z}{dt^2} - (z-c)\frac{d^2 y}{dt^2} \right) \alpha + \ldots \right\} d\tau = (\mathrm{M}_x + c\mathrm{Y} - b\mathrm{Z})\,\alpha + \ldots,$$

dove i termini sottintesi si deducono dallo scritto in ogni membro permutando circolarmente (a, b, c), (α, β, γ), (x, y, z), $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$. La qual equazione si può stabilire immediatamente sulla circostanza che un atto di movimento virtuale ad ogni istante è un atto di movimento rotatorio colla retta fissa per asse (§ 419); oppure, seguendo il procedimento generale del § 425, deducendola da (1, § 413) in base alle equazioni:

$$l' + q'c - r'b = 0, \quad m' + r'a - p'c = 0, \quad n' + p'b - q'a = 0,$$
$$p' = \omega\alpha, \qquad q' = \omega\beta, \qquad r' = \omega\gamma,$$

esprimenti, le prime tre, che è nulla la velocità del punto (a, b, c), e le rimanenti che la velocità angolare ha $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, per coseni di direzione.

Giova assumere la retta, presa in un certo senso, come uno degli assi coordinati. Assumendola per asse delle x, la precedente equazione può porsi sotto la forma:

$$\int k\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)d\tau=\mathbf{M}_x.$$

Ora la retta fissa si suppone data, per modo che, immaginato un semipiano fisso terminato ad essa, basterà determinare in funzione del tempo la longitudine d'un punto qualunque del corpo — per esempio, del centro di massa — rispetto a quel semipiano come primo meridiano, e alla retta, volta nel debito senso, come asse. Ne viene, per la precedente equazione, indicando con φ la misura dell'angolo formato dal semipiano terminato alla retta passante pel centro di massa col semipiano analogo orientato come l'asse delle y positive, inteso crescente in senso positivo rispetto all'asse delle x, e con K quella del momento d'inerzia rispetto alla stessa retta, che il movimento sarà determinato da:

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\mathbf{M}_x, \tag{1}$$

subordinatamente alle condizioni iniziali:

$$t=0:\qquad \varphi=\varphi_0,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\varphi'_0.$$

§ 432. — Notiamo il caso che esista potenziale W (§ 285). La potenza corrispondente all'atto di movimento al tempo t avendo allora per misura:

$$\frac{dW}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt},$$

mentre la stessa misura, nelle precedenti ipotesi, è, in ogni caso, rappresentata da:

$$\mathbf{M}_x\frac{d\varphi}{dt},$$

si avrà:

$$\mathbf{M}_x=\frac{dW}{d\varphi};$$

e per equazione del movimento:

$$K \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \frac{d W}{d \varphi}.$$

§ 433. — L'equazione d'equilibrio risulta, col precedente significato dei simboli:

$$\mathbf{M}_x = 0,$$

e se esiste il potenziale W, di cui al § precedente:

$$\frac{d W}{d \varphi} = 0.$$

Quindi, " è posizione d'equilibrio ognuna per la quale il risultante dei momenti delle forze esterne limite e delle pressioni prestabilite rispetto ad un punto qualunque della retta fissa è perpendicolare alla retta medesima oppure nullo. „

§ 434. — Determinata per ogni istante la posizione del corpo, le (1, § 414) forniscono la così detta " reazione dell'asse „ o " reazione *complessiva* dei punti fissi „, il cui componente secondo la retta fissa risulta eguale e opposto a quello delle forze esterne limite e pressioni prestabilite. Per le (2, § 414 è poi nullo il componente secondo la stessa retta del risultante dei momenti delle pressioni vincolari rispetto ad un punto qualunque dell'asse, ossia il risultante dei momenti delle pressioni rispetto alla retta fissa. E concependo sostituito alla retta fissa un cilindro circolare colla retta per asse, sulla cui superficie possa scorrere, senza scivolare nel senso dell'asse, quella d'una cavità eguale del corpo (§ 408), questa circostanza si consegue coll'ipotesi che il componente della pressione specifica vincolare relativo ad ogni punto secondo un piano perpendicolare all'asse sia diretta come il raggio, cioè normale alla superficie resistente.

Pendolo.

§ 435. — " Movimento del pendolo „ o " pendolare „ chiamiamo quello ch'è determinato dalla gravità, col concorso dei vincoli della rigidità e di una retta fissa perpendicolare al filo a piombo, la quale si chiama l' " asse del pendolo „.

Indichi K la grandezza del momento d'inerzia rispetto all'asse: s quella della distanza da esso del centro di massa; m quella della massa: φ la misura dell'angolo formato dal semipiano terminato all'asse contenente il centro di massa, al tempo t, col semipiano analogo orientato come il filo a piombo, se non è, per avventura, $s = 0$.

Si avrà pel potenziale W di gravità corrispondente ad ogni posizione possibile del mobile:

$$W = mg\,s\cos\varphi \qquad (1)$$

donde: *

$$\frac{dW}{d\varphi} = \mathbf{M}_x = -\,mg\,s\sin\varphi.$$

§ 436. — Di qui segue, in primo luogo, pel § 433, che, se non è $s = 0$, l'asse non contiene il centro di massa, si avranno *due* distinte posizioni d'equilibrio, corrispondenti a $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, la prima delle quali *stabile*, perchè chiaramente W, rappresentato da (1), riceve per esso il valor massimo, mentre per l'altra riceve il valor minimo. Del resto, così per l'una come per l'altra posizione, è condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio che la relativa equazione sia costantemente soddisfatta. Invece, se è $s = 0$, ogni posizione possibile del mobile è posizione d'equilibrio: e per l'equilibrio si richiede la condizione supplementare che ad un istante la forza viva sia nulla (§ 424). Questo caso, al quale, corrisponde un movimento rotatorio uniforme, s'intende, nel seguito, escluso.

§ 437. — In secondo luogo, conformemente al § 432:

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg\,s\sin\varphi = 0; \qquad (1)$$

che è l'equazione del movimento.

* Giova calcolare $\mathbf{M}_x$ anche direttamente, come componente del momento del peso del corpo applicato al suo centro di massa secondo la retta fissa volta nel senso secondo il quale è positivo il senso in cui cresce l'angolo di misura φ, rispetto ad un punto qualunque della retta medesima come polo. E perciò osserviamo che, assunto per polo il piede della perpendicolare descritta alla retta dal centro di massa, la grandezza di detto momento riesce senz'altro $mg\,s\,|\sin\varphi|$, mentre la sua direzione è quella della retta, e il senso quello rispetto a cui decresce l'angolo dei due semipiani che individuano φ (cioè l'angolo concavo).

La quantità la cui misura è $\frac{K}{ms}$ corrisponde all'unità di lunghezza. Porremo:

$$\frac{K}{ms} = l,$$

e chiameremo, per brevità di discorso, " indice „ il punto del raggio descritto perpendicolarmente dall'asse al centro di massa, alla distanza l dall'asse medesimo: mentre la lunghezza misurata da l, per ragioni che emergeranno a suo luogo, sarà chiamata qualche volta la " lunghezza del pendolo „.

Con ciò l'equazione precedente può scriversi così:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \qquad (1)'$$

E di qui si ricava, moltiplicando ambi i membri per $\frac{d\varphi}{dt}$, e integrando:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{h}{l^2} + 2\frac{g}{l}\cos\varphi, \qquad (2)$$

dove, indicando con v_0 e z_0 le misure della velocità dell'indice e della sua quota rispetto al piano perpendicolare al filo a piombo passante per l'asse, intesa positiva pei punti al disotto del piano, ad un certo istante, che potremo prendere per iniziale, è:

$$h = v_0^2 - 2gz_0. \qquad (3)$$

La qual equazione è l'*integrale della forza viva*, che si può anche immediatamente ricavare dal relativo teorema (§ 428).

In conseguenza di questa equazione (2), condizione necessaria e sufficiente perchè ad un istante la velocità angolare, e quindi la velocità d'ogni punto e la forza viva del corpo, sia nulla, è che il corrispondente valor φ soddisfaccia:

$$\frac{h}{l^2} + 2\frac{g}{l}\cos\varphi = 0, \qquad (4)$$

la quale non ammette radici reali, oppure, in ciascuno dei due intervalli limitati da 0 e $-\pi$ e da 0 e π, ne ammette una, $-\alpha$ e α, secondo che si verifica l'una o l'altra delle due relazioni;

$$\left|\frac{h}{2gl}\right| > 1, \qquad \left|\frac{h}{2gl}\right| < 1.$$

Notiamo che la prima esclude $h < 0$, che condurrebbe a:

$$v_0^2 < 2g(z_0 - l),$$

mentre $z_0 - l < 0$; e che $h = -2gl$ equivale a:

$$v_0^2 = 2g(z_0 - l),$$

che, per la stessa ragione, si riduce a $z_0 = l$, $v_0 = 0$: per modo che in questo caso la forza viva del corpo è nulla nella posizione d'equilibrio stabile (§ 436), e nullo il movimento (§ 424) — caso che, nella seguente indagine del movimento, intenderemo escluso.

Resta così che α e $-\alpha$ non avranno valori reali, o li avranno distinti, secondo che si verificherà l'una o l'altra delle due relazioni:

$$v_0^2 > 2g(z_0 + l), \qquad v_0^2 < 2g(z_0 + l).$$

Quindi la velocità dell'indice non si annullerà mai o si annullerà sopra un certo piano perpendicolare al filo a piombo, secondo che la velocità ad un istante supererà o no quella che, attribuendola al centro di massa d'un grave libero, sullo stesso piano perpendicolare al filo a piombo, ne segue che il centro di massa di questo grave si eleverà al piano analogo più elevato che l'indice può raggiungere. Ciò che si può desumere senz'altro dall'equazione (4), ponendola, mediante (3), sotto la forma:

$$z_0 - l \cos \varphi = \frac{v_0^2}{2g};$$

donde apparisce che i valori di φ che vi soddisfanno definiscono il piano perpendicolare al filo a piombo più elevato che raggiungerà il centro di massa d'un grave libero, partendo dal piano analogo occupato dall'indice ad un istante, colla velocità dell'indice all'istante medesimo.

§ 438. — Nel primo caso, $\frac{d\varphi}{dt}$, non annullandosi mai, manterrà costantemente il segno che le compete all'istante iniziale; cioè φ sarà costantemente crescente o decrescente; e il movimento rotatorio progressivo. La (2) fornisce:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{h}{l^2} + 2\frac{g}{l}\cos\varphi}, \tag{1}$$

dove al radicale va attribuito il segno di $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$. E di qui, posto:

$$\frac{4gl}{h+2gl} = \varkappa^2, \qquad \frac{\varphi}{2} = \vartheta,$$

per la prima delle quali $\varkappa^2$ risulta positivo e < 1, si ricava, computando dal medesimo istante il tempo e l'angolo di rotazione:

$$t = \varkappa\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}},$$

dove il radicale esterno al segno d'integrazione s'intenderà sempre positivo: in seguito a che il secondo radicale avrà il segno di φ per t positivo.

Basta evidentemente considerare il caso che questo segno sia $+$: donde si dedurrà immediatamente l'altro. Poniamo, in tale ipotesi:

$$\mathrm{T} = \varkappa\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}}.$$

Si trova agevolmente che, se è $\vartheta = n\pi + (\vartheta)$, si ha:

$$t = \varkappa\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}} = n\mathrm{T} + \varkappa\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{(\vartheta)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}}.$$

Donde segue che a valori di φ differenti per un multiplo di 2π corrispondono valori di t differenti per un egual multiplo di T; ossia che, ogniqualvolta la grandezza del tempo cresce di T, il mobile riprende la stessa posizione. Perciò il tempo misurato da T si chiama la " durata d'una rotazione ".

Coi simboli delle funzioni ellittiche: *

$$\varphi = 2\vartheta = 2\,\mathrm{am}\,\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad (\mathrm{mod}\ \varkappa).$$

§ 439. — Nella seconda ipotesi, $\frac{d\varphi}{dt}$ è zero, come s'è veduto, agli istanti corrispondenti a $\varphi = -\alpha$, $\varphi = \alpha$, e ad ogni altro,

* Cfr. § 359; coi quali simboli, posta (1) del § stesso, si ha $\psi = \mathrm{am}\,u$.

positivo o negativo, secondo che l'istante relativo a $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ immediatamente precedente quello che si considera corrisponde a $\varphi = -\alpha$ o $\varphi = \alpha$ (ossia l'immediatamente seguente corrisponde a $\varphi = \alpha$ o $\varphi = -\alpha$). Difatti, per (1' § 437), $\frac{d\varphi}{dt}$ è crescente per $\varphi = -\alpha$, e decrescente per $\varphi = \alpha$; oltre di che si annulla per quei valori di φ, e per nessun altro (compreso fra 0 e π, 0 e $-\pi$). Donde segue che, col progredire del tempo, φ andrà crescendo fra $-\alpha$ ed α, e decrescendo fra α e $-\alpha$ alternativamente. E cioè il corpo oscillerà intorno all'asse, compiendo alternativamente, da una parte e dall'altra del piano passante per esso parallelo al filo a piombo, una rotazione la grandezza del cui angolo è α, che porterà ogni volta l'indice al livello definito dall'equazione (4, § 437).

Per un'indagine più particolare, osserviamo che la (2, § 437), tenendo calcolo di:

$$\frac{h}{l^2} + \frac{2g}{l}\cos\alpha = 0,$$

fornisce:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}, \tag{1}$$

dove, intesi i radicali positivi, il segno va stabilito ai diversi istanti col precedente criterio.

Escludiamo, salvo a considerarlo a parte, il caso $\alpha = \pi$, per modo che sia:

$$-\pi < \varphi < \pi; \tag{2}$$

e poniamo:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\vartheta. \tag{3}$$

Ne viene:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \tag{4}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\vartheta}, \tag{5}$$

dove, per (2), al radicale va attribuito il segno $+$,

$$\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} = \pm\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\vartheta, \tag{6}$$

dove va preso $+$ o $-$ secondo che è $\cos\vartheta$ positivo o negativo.

Ora, se (ϑ) dinota la soluzione di (3) compresa fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, tutte saranno rappresentate da:

$$\vartheta = 2n\pi + (\vartheta), \qquad \vartheta = (2n+1)\pi - (\vartheta), \tag{7}$$

dove n rappresenta un intero qualunque; e $\cos\vartheta$, per ogni valore di n, se non è zero, è per la prima e la seconda forma rispettivamente positivo e negativo. Stabiliamo che, concepita la successione dei valori di t ai quali si riferisce uno stesso valore di φ, vi corrisponda ordinatamente la successione dei valori di ϑ forniti, in base a (3), di seguito, dalle (7), col crescere di n, intendendo che al primo valore susseguente all'origine dei tempi, o alla stessa origine, corrisponda (ϑ) o $\pi - (\vartheta)$, forniti con $n = 0$ dalla prima e dalla seconda delle (7), secondo che $\frac{d\varphi}{dt}$, alla stessa origine dei tempi, o immediatamente dopo, è positivo o negativo; per modo che la variabile ausiliaria ϑ cresca infinitamente col tempo. Allora, per (6), sarà:

$$\pm\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\vartheta, \tag{8}$$

dove il doppio segno ha lo stesso significato come nella (1).

Quindi, in primo luogo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\vartheta, \tag{9}$$

la quale esprime la velocità angolare.

In secondo luogo, per (4), (5) e (7), la (1) si trasforma in:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\vartheta}\,.$$

Quest'equazione, essendo il radicale costantemente positivo, e ϑ crescente col tempo, è della stessa forma della (1, § 438), precedentemente considerata.

Se ne ricava, inteso che all'origine dei tempi il centro di massa sia compreso nel semipiano terminato all'asse orientato come il filo a piombo, e la velocità angolare positiva — cioè $\varphi = 0$, $\vartheta = 0$:

$$t = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \vartheta}}. \tag{10}$$

E posto:

$$T = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \vartheta}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \vartheta}}, \tag{11}$$

si trova che a valori di t differenti per un multiplo di T corrispondono valori di ϑ differenti per un egual multiplo di π (cfr. § 438): quindi, se il multiplo è dispari — come agevolmente si riconosce — valori di φ e di $\frac{d\varphi}{dt}$ eguali e d'opposto segno; per modo che, ogniqualvolta la misura del tempo cresce di 2 T, il mobile riprende la stessa posizione, colla stessa velocità angolare. Perciò il tempo misurato da T si dice " durata d'una mezza oscillazione ". *

Coi simboli delle funzioni ellittiche:

$$\vartheta = \mathrm{am} \sqrt{\frac{l}{g}}\, t, \qquad \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \,\mathrm{sn} \sqrt{\frac{l}{g}}\, t \qquad \left(\mathrm{mod} \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

§ 440. — Nel caso di $\alpha = \pi$, la (1, § 439) si riduce a:

$$\frac{d \frac{\varphi}{2}}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \frac{\varphi}{2},$$

donde:

$$t - t_1 = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \log \frac{\tan \frac{1}{4}(\pi + \varphi)}{\tan \frac{1}{4}(\pi + \varphi_1)};$$

* Secondo alcuni " durata d'un'oscillazione *semplice* ", ed anche " d'un'oscillazione. "

nella qual formola t e t_1 s'intenderanno compresi fra gli stessi tempi consecutivi corrispondenti a $\varphi = -\pi$, $\varphi = \pi$, o $\varphi = \pi$, $\varphi = -\pi$, e il segno scelto conformemente alla prima o alla seconda ipotesi.

Notiamo che alle ipotesi $\varphi_1 = -\pi$ col segno superiore, e $\varphi_1 = \pi$, col segno inferiore, corrisponde $t - t_1 = \infty$ qualunque sia φ. Donde si deduce (cfr. § 437) che, se l'indice si trova con velocità nulla al livello più elevato compatibile col vincolo della retta fissa, non se ne scosterà sensibilmente in alcun tempo finito; cioè il corpo serberà perpetuamente la posizione corrispondente.

§ 441. — Questa posizione è la stessa per cui il centro di massa si trova nel piano parallelo al filo a piombo passante per l'asse, al disopra dell'asse; la quale sappiamo come sia posizione d'equilibrio. Così si verifica come, supposto che il corpo vi si trovi ad un istante con forza viva nulla, la serberà costantemente. Essa non è tuttavia posizione d'equilibrio stabile; perchè, suppostovi il corpo con una forza viva comunque piccola, ne viene il movimento rotatorio progressivo (§ 438).

§ 442. — Sappiamo ch'è invece posizione d'equilibrio stabile quella per cui il centro di massa giace nel suddetto piano, al di sotto dell'asse (§ 437). E lo possiamo anche dedurre agevolmente dai precedenti risultati relativi al movimento. Difatti, supposta la forza viva del corpo in questa posizione, in primo luogo, abbastanza piccola perchè riesca $v_0^2 < 4gl$, il movimento sarà necessariamente oscillatorio (§ 437), e la grandezza della forza viva stessa rappresentata, per (8, § 439), da:

$$m g s \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

donde emerge che, perchè si mantenga, nel corso del movimento:

$$\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \varepsilon,$$

basta che la grandezza della forza viva nella posizione in discorso sia inferiore a $m g s \varepsilon^2$.

§ 443. — Supposto α abbastanza piccola per poter trascurare sensibilmente l'aggiunta dei numeri dell'ordine delle sue potenze

superiori alla prima, ciò che *a fortiori* si verificherà per ogni altro valore di φ, avremo sensibilmente per (9, 3, 10, § 439):

$$\vartheta = \sqrt{\frac{l}{g}}\, t, \qquad \varphi = \alpha \sin \sqrt{\frac{l}{g}}\, t, \qquad T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Cioè " la durata d'un'oscillazione è sensibilmente indipendente dall'ampiezza, quando questa sia inferiore ad un certo termine assegnabile „. Questa è la celebre proprietà dell'" isocronismo delle piccole oscillazioni (ἴσος = eguale, χρόνος = tempo) „.

Notiamo che nelle precedenti ipotesi la (1, § 437) si riduce colla supposta approssimazione a

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{g}{l} u,$$

dove $u = l \sin \varphi$ rappresenta la misura del segmento di corda dell'arco descritto dall'indice, contato dalla posizione d'equilibrio stabile; donde si deduce immediatamente:

$$u = A \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

equazione del così detto " movimento armonico „ (perchè approssimativamente quello dei punti di un diapason vibrante): conformemente ai risultati suddetti.

Principio del regolatore a forza centrifuga. *

§ 444. — Consideriamo anche il movimento di un corpo determinato dalla gravità, e dai vincoli della rigidità del corpo e del movimento rotatorio d'una sua retta perpendicolare al filo a piombo (cerniera) intorno alla parallela al filo a piombo passante per un punto della retta medesima (albero) come asse. Questo è un esempio di vincolo dipendente del tempo. Però ci riduciamo subito al caso della retta fissa, indagando il movimento

* Si allude al noto regolatore automatico della pressione nelle macchine a vapore. Una teoria più completa richiede l'ipotesi che la velocità angolare dell'albero varii in generale, secondo una legge prestabilita.

del corpo relativo alla terna degli assi mobili formata dalla cerniera, dalla perpendicolare ad essa e all'albero passante pel loro punto d'intersezione, e dall'albero, presi tutti in un certo senso: donde poi emerge il movimento proposto (§ 134).

L'equazione differenziale del movimento relativo suddetto è senz'altro la (1, § 432), dove W rappresenta la somma del potenziale di gravità e del potenziale delle forze centrifughe (§ 327); poichè la componente secondo la cerniera del risultante dei momenti del sistema delle forze centrifughe composte applicato ai punti del corpo rispetto ad un punto della cerniera come polo è nulla, riuscendo l'accelerazione centrifuga composta in ogni punto parallela alla cerniera. *

Abbiano rispetto alla cerniera i simboli adoperati nel caso del pendolo il significato allora stabilito rispetto alla retta fissa, oltre di che a rappresenti la grandezza del segmento compreso fra la projezione del centro di massa sulla cerniera e l'intersezione coll'albero — quantità costante: e indichiamo con ω la grandezza della velocità angolare del movimento rotatorio della cerniera, e con ρ quella della distanza del punto qualunque del corpo dall'albero.

Si avrà pel potenziale delle forze centrifughe (§§ 327, 278):

$$\frac{1}{2}\omega^2 \int k\,\rho^2\,d\tau = \frac{1}{2}\omega^2\left(m\,(a^2 + s^2 \sin^2 \varphi) + \int k\,(\xi^2 + \eta^2)\,d\tau\right),$$

dove ξ, η dinotano le coordinate della projezione del punto qualunque sul piano perpendicolare all'albero passante pel centro

* Osservisi che, qualunque sia il movimento relativo, determinato, come quello che si considera, col concorso del vincolo d'una retta del corpo invariabilmente unita agli assi mobili, la componente secondo questa retta del risultante dei momenti rispetto ad un punto della retta del sistema delle forze centrifughe composte, applicate ai punti corrispondenti, è nulla. Basta osservare che la forza centrifuga composta, applicata al punto corrispondente, giace nel piano del punto e della retta, essendo perpendicolare alla velocità (relativa) dello stesso punto, che è perpendicolare a questo piano. E si può anche valersi della considerazione che quella componente è la misura della potenza del suddetto sistema delle forze centrifughe composte, la quale riesce nulla.

Così, i risultati ottenuti intorno al pendolo sono indipendenti dall'ipotesi che, nel calcolo della gravità, si consideri la forza centrifuga composta come insensibile (§ 344).

di massa, secondo una coppia d'assi coordinati aventi l'origine nel centro di massa, e le direzioni della cerniera e della perpendicolare ad essa e al filo a piombo, cioè all'albero.

Si vede che ξ si manterrà costante; mentre indicando con $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ le coordinate della projezione sul piano perpendicolare alla cerniera, secondo una coppia di assi, aventi per origine il centro di massa, e il secondo perpendicolare alla cerniera, sarà, scegliendo debitamente il senso:

$$\eta = \mathfrak{y} \cos\varphi + \mathfrak{z} \sin\varphi.$$

E per conseguenza:

$$\int k\,\eta^2\,d\tau = \cos^2\varphi \int k\,\mathfrak{y}^2\,d\tau + \sin^2\varphi \int k\,\mathfrak{z}^2\,d\tau + 2\cos\varphi\sin\varphi \int k\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,d\tau,$$

dove i tre integrali del secondo membro sono costanti, e il terzo nullo, se la perpendicolare alla cerniera passante pel centro di massa è un asse principale d'inerzia del corpo nello stesso punto (§ 279), caso che, per semplicità, vogliamo supporre.

Ciò posto, ommettendo i termini costanti, che non hanno influenza sull'equazione del movimento, concludiamo:

$$W = m g s \cos\varphi + \frac{1}{2}\omega^2 \left\{ \left(m s^2 + \int k\,\mathfrak{y}^2\,d\tau \right) \cos^2\varphi + \int k\,\mathfrak{z}^2\,d\tau \sin^2\varphi \right\};$$

donde, indicando con I il momento d'inerzia del corpo rispetto alla perpendicolare descritta dal centro di massa alla cerniera, e con J il momento d'inerzia rispetto alla perpendicolare al piano della cerniera e del centro di massa, passante per questo, in seguito a che ponendo:

$$m s^2 + J - I = A,$$

si ha *:

$$\frac{dW}{d\varphi} = -(m g s - \omega^2 A \cos\varphi) \sin\varphi,$$

$$\frac{d^2 W}{d\varphi^2} = -\omega^2 A \sin^2\varphi - (m g s - \omega^2 A \cos\varphi) \cos\varphi. \qquad (1)$$

* Si ha così $I = \int k(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)\,d\tau$, $J = \int k(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{z}^2)\,d\tau$, indicando con $\mathfrak{x}$ la terza coordinata (ortogonale) del punto di cui le rimanenti sono $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$.

Ne viene l'equazione d'equilibrio (relativo):

$$(m g s - \omega^2 A \cos \varphi) \sin \varphi = 0,$$

che si scinde nelle due:

$$\sin \varphi = 0, \qquad m g s - \omega^2 A \cos \varphi = 0,$$

le quali forniscono, alla lor volta, le due coppie di posizioni d'equilibrio distinte, determinate da

$$\varphi = 0, \qquad \varphi = \pi,$$

e

$$\varphi = \pm \left(\arccos \frac{m g s}{\omega^2 A}\right).$$

Queste ultime sono reali sotto la condizione:

$$\omega^2 A \geqq m g s, \tag{2}$$

e in tal caso chiaramente simmetriche rispetto al piano passante per la cerniera parallelo al filo a piombo. Se inoltre è $A > 0$, esse sono anche posizioni d'equilibrio stabile, come apparisce dalla (1), in quanto che vi corrisponde un massimo del potenziale, mentre alle rimanenti corrisponde un minimo; e se è $A < 0$, vi corrisponde un minimo, mentre a $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, un massimo; per modo che sono posizioni d'equilibrio stabile quelle per cui il centro di massa del corpo giace nel piano passante per la cerniera, parallelo al filo a piombo. Nel caso poi che la (2) non si verifichi, non si hanno più che le due prime posizioni d'equilibrio: $\varphi = 0$ sempre corrispondente ad un massimo, e $\varphi = \pi$ sempre ad un minimo del potenziale.

L'equazione del movimento sarà, alla sua volta, indicando con K, conformemente a quanto fu detto sopra, il momento di inerzia rispetto alla cerniera, e definito l con

$$m s l = K:$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \frac{A}{K} \cos \varphi\right) \sin \varphi = 0,$$

di cui si ha immediatamente l'equazione integrale (della forza viva):

$$\left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 = \frac{h}{l^2} + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi - \omega^2 \frac{A}{K} \cos^2 \varphi,$$

dove h rappresenta la costante d'integrazione, da determinarsi mediante l'equazione:

$$\varphi_0'^2 = \frac{h}{l^2} + 2\frac{g}{l}\cos\varphi_0 - \omega^2\frac{A}{K}\cos^2\varphi_0.$$

E si vede come si potrà procedere allo studio ulteriore del movimento con un metodo analogo a quello adoperato per il pendolo (§§ 437-443).

Un corpo rotolante sopra un piano fisso. Movimento della trottola.

§ 445. — Sia un corpo rigido, la cui superficie supporremo tutta convessa, obbligato a mantenersi tangente ad un piano fisso.

Assumiamo una terna d'assi fissi, tali, per semplicità di calcolo, che il piano xy sia il supposto piano fisso, e l'asse delle z volto dalla parte del corpo; e consideriamo poi la terna d'assi mobili invariabilmente uniti al corpo adoperata in altre questioni, della quale, al solito, $\alpha, \beta\, \gamma$ indichino le coordinate dell'origine, e $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $(i = 1, 2, 3)$ i coseni di direzione degli assi rispetto alla terna fissa.

Siano $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ le coordinate per rispetto alla seconda terna del punto di contatto, nella posizione al tempo t.

Conformemente all'equazione delle superficie riferita alla terna medesima, sarà:

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0. \tag{1}$$

In secondo luogo:

$$\frac{\frac{dF}{d\mathfrak{x}}}{\gamma_1} = \frac{\frac{dF}{d\mathfrak{y}}}{\gamma_2} = \frac{\frac{dF}{d\mathfrak{z}}}{\gamma_3}, \tag{2}$$

esprimenti che la normale alla superficie del corpo nel punto $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ha la direzione dell'asse delle z, cioè della normale al piano: tre equazioni di cui una è conseguenza delle altre due.

In virtù di queste tre equazioni, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ risultano funzioni di α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2\ 3$), e, in ultima analisi, delle tre variabili in termini delle quali si esprimono i nove coseni.

Si ha poi:

$$\gamma + \gamma_1 \mathfrak{x} + \gamma_2 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z} = 0, \tag{3}$$

esprimente che la z del punto di contatto è costantemente nulla, cioè il punto medesimo nel piano.

Con questa relazione, tenuto calcolo del precedente risultato, γ, alla sua volta, si esprime in termini delle suddette variabili.

Restano quindi, per fissare la posizione del corpo ad ogni istante, cinque variabili indipendenti — le tre, donde dipendono i nove coseni — per esempio gli angoli φ, f, θ — e le coordinate α, β della projezione sul piano fisso dell'origine degli assi mobili.

Per stabilire le cinque equazioni pure atte a determinarle, notiamo in primo luogo, che se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ indicano le coordinate nel piano del punto di contatto al tempo t, rispetto alla terna fissa, si ha:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \alpha + \alpha_1 \mathfrak{x} + \alpha_2 \mathfrak{y} + \alpha_3 \mathfrak{z} \\ \mathbf{y} &= \beta + \beta_1 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \beta_3 \mathfrak{z}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

colle quali $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ si esprimono senz'altro in termini delle variabili in discorso.

Ciò premesso, la velocità di questo punto al considerato tempo t essendo parallela al piano, si ha la relazione

$$n' + p' \mathbf{y} - q' \mathbf{x} = 0; \tag{5}$$

introducendo la quale in (1, § 413), se ne ricava, col noto procedimento, il sistema richiesto:

$$\left.\begin{aligned} \int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \mathbf{X}, \qquad \int k \frac{d^2 y}{dt^2} d\tau = \mathbf{Y} \\ \int k\left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right) d\tau = \mathbf{M}_x + \mathbf{y}\left(\int k \frac{d^2 z}{dt^2} - \mathbf{Z}\right), \\ \int k\left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2}\right) d\tau = \mathbf{M}_y - \mathbf{x}\left(\int k \frac{d^2 z}{dt^2} - \mathbf{Z}\right), \\ \int k\left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right) d\tau = \mathbf{M}_z. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

A questo sistema di equazioni si può dare, come agli analoghi, relativi ai casi precedenti, forme diverse. Le due prime equazioni si possono scrivere:

$$\mathrm{m}\frac{d^2 x}{d t^2} = \mathbf{X}, \qquad \mathrm{m}\frac{d^2 y}{d t^2} = \mathbf{Y}; \tag{7}$$

e le tre rimanenti, intendendo che la terna degli assi mobili sia formata cogli assi principali d'inerzia nel centro di massa (cfr. §§ 308, 309):

$$\frac{d(P\mathfrak{p}\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\alpha_2 + R\mathfrak{r}\alpha_3)}{dt} = \mathbf{M}_x + (\mathbf{y} - y)\left(\mathrm{m}\frac{d^2 z}{dt^2} - \mathbf{Z}\right),$$

$$\frac{d(P\mathfrak{p}\beta_1 + Q\mathfrak{q}\beta_2 + R\mathfrak{r}\beta_3)}{dt} = \mathbf{M}_y + (\mathbf{x} - x)\left(\mathrm{m}\frac{d^2 z}{dt^2} - \mathbf{Z}\right),$$

$$\frac{d(P\mathfrak{p}\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\gamma_2 + R\mathfrak{r}\gamma_3)}{dt} = \mathbf{M}_z,$$

dove m indica la grandezza della massa del corpo, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$, dinotano le componenti del risultante dei momenti del sistema delle forze esterne limite e pressioni prestabilite rispetto al punto occupato dal centro di massa al tempo t, e gli altri simboli conservano il significato dei precedenti casi.

Inoltre, moltiplicando le tre ultime equazioni per α_i, β_i, γ_i con $i = 1, 2, 3$, e ciascuna volta sommando, si trova il sistema equivalente (cfr. §§ 350, 426):

$$P\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - (Q - R)\mathfrak{q}\mathfrak{r} = \mathfrak{M}_\mathfrak{x} + \mathbf{P}(\mathfrak{y}\gamma_3 - \mathfrak{z}\gamma_2),$$

$$Q\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - (R - P)\mathfrak{r}\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{y} + \mathbf{P}(\mathfrak{z}\gamma_1 - \mathfrak{x}\gamma_3),$$

$$R\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - (P - Q)\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_\mathfrak{z} + \mathbf{P}(\mathfrak{x}\gamma_2 - \mathfrak{y}\gamma_1),$$

dove:

$$\mathbf{P} = \mathrm{m}\frac{d^2 z}{dt^2} - \mathbf{Z},$$

e $\mathfrak{M}_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{M}_\mathfrak{y}$, $\mathfrak{M}_\mathfrak{z}$, sono le componenti del suddetto risultante dei momenti secondo una terna d'assi aventi l'orientazione di quella degli assi principali d'inerzia al supposto istante.

Infine, rammentiamo che, conformemente a (4) e (3), si ha:

$$\mathrm{x} = x + \alpha_1 \mathfrak{x} + \alpha_2 \mathfrak{y} + \alpha_3 \mathfrak{z},$$
$$\mathrm{y} = y + \beta_1 \mathfrak{x} + \beta_2 \mathfrak{y} + \beta_3 \mathfrak{z},$$
$$0 = z + \gamma_1 \mathfrak{x} + \gamma_2 \mathfrak{y} + \gamma_3 \mathfrak{z}.$$

§ 446. — Nel caso dell'equilibrio, le equazioni (6, § 445) si riducono a:

$$\mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{Y} = 0, \quad \mathbf{M}_x = \mathrm{y}\,\mathbf{Z}, \quad \mathbf{M}_y = -\mathrm{x}\,\mathbf{Z}, \quad \mathbf{M}_z = 0,$$

le quali esprimono che la risultante delle forze limite e pressioni prestabilite è perpendicolare al piano fisso, e ammette asse d'applicazione passante pel punto di contatto.

§ 447. E questo, in ogni caso, si verifica per la risultante delle pressioni vincolari, che si chiama la " reazione del piano „. Infatti, si deduce dalle (1, 2, § 414):

$$\mathbf{X}' = \mathbf{Y}' = 0, \quad \mathbf{Z}' = \mathrm{P}, \quad \mathbf{M}'_x = \mathrm{y}\,\mathrm{P}, \quad \mathbf{M}'_y = -\mathrm{x}\,\mathrm{P}, \quad \mathbf{M}'_z = 0;$$

per le quali P è la misura della reazione medesima, assunto per verso dell'asse quello che volge dalla parte del piano fisso da cui si trova il corpo considerato.

§ 448. — Notiamo che le variabili individuanti la posizione del corpo, nel caso considerato nei §§ precedenti, si riducono a cinque, in virtù della (3, § 445), e le cinque equazioni pure del movimento (6, § 445) atte a determinarle si deducono, in virtù della (5, § 445) dall'equazione di *d'Alembert* e *Lagrange*. Ora, queste due relazioni stanno pur di stabilire che il punto $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ appartenga costantemente al piano fisso, assunto come piano xy. Quindi le equazioni (6, § 445) convengono al movimento d'un corpo, ogniqualvolta il vincolo sia questo: e, col concorso di qualsiasi condizione — come quella che, il punto $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ appartenendo alla superficie, il piano fisso vi sia tangente, la quale si traduce nelle (1, 2, § 445) — atta a determinare $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, serviranno al calcolo del movimento. Per esempio, si potrà supporre che il punto in discorso sia un punto dato *del corpo*, per modo che $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, riescano costanti date, senz'altra condizione.

A quest'ipotesi corrisponde il caso materiale d'un corpo la cui superficie presenta un ***punto conico***, col quale si appoggia costantemente ad un piano fisso. Si ha così il movimento della trottola, che, per quanto abbiamo detto, si calcola colle (6, § 445), o, s'intende, colle loro diverse trasformazioni, attribuendo alle $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ il significato di costanti note.

Corpo grave rotolante sopra un piano.

§ 449. — Supposto il piano non parallelo al filo a piombo, e presa una perpendicolare volta in alto per asse delle z, e per asse delle x, se il piano è perpendicolare al filo a piombo, una sua retta qualsivoglia, e diversamente l'intersezione, volta in basso, del piano medesimo col piano passante per l'asse delle z parallelo al filo a piombo, — retta di massima pendenza, — indichi i l'angolo formato dall'asse delle z coll'orientazione opposta al filo a piombo. Sarà:

$$\mathrm{X} = \mathrm{m}\, g \sin i, \qquad \mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{m}\, g \cos i$$

$$\mathrm{M}_x = \mathrm{m}\, g \cos i\, \bar{y}, \quad \mathrm{M}_y = \mathrm{m}\, g\, (\sin i\, \bar{z} - \cos i\, \bar{x}), \quad \mathrm{M}_z = -\, \mathrm{m}\, g \sin i\, \bar{y}.$$

Con ciò le (7, § 445) si riducono in questo caso a

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d t^2} = g \sin i, \qquad \frac{d^2 \bar{y}}{d t^2} = 0.$$

Quindi il moto della projezione del centro di massa sul piano è il moto parabolico (§ 196), nell'ipotesi che $g \sin i$ sia la grandezza dell'accelerazione, e la sua orientazione quella dell'asse delle x, cioè dell'intersezione del piano col piano perpendicolare, parallelo al filo a piombo, ossia della retta di massima pendenza, volta dall'alto in basso.

Su ciò si fonda lo studio sperimentale del moto dei gravi mediante il " piano inclinato ", secondo la celebre esperienza di *Galileo.*

In secondo luogo le equazioni d'equilibrio si riducono a

$$i = 0, \qquad x = \bar{x}, \qquad y = \bar{y}:$$

esprimenti che il piano dev'essere perpendicolare al filo a piombo, e il centro di massa serbarsi sulla perpendicolare ad esso passante pel punto di contatto.

Ne viene, per ogni posizione del punto di contatto conforme alla suddetta condizione, cioè subordinatamente alle stesse equazioni d'equilibrio, un insieme continuo di posizioni d'equilibrio, che si deducono l'una dall'altra con una rotazione del corpo intorno alla perpendicolare al piano passante pel centro di massa; e per conseguenza è necessaria e sufficiente per l'equilibrio la condizione complementare che ad un istante la forza viva sia nulla (cfr. § 424).

Vincoli che si traducono in equazioni lineari tra i parametri delle velocità. 2.° Metodo.

§ 450. — Siano, come al § 425, ν corpi così vincolati che tra i parametri delle loro velocità virtuali sussistano $\mu < \nu$ relazioni lineari, che potremo rappresentare con

$$\Sigma_i (L_{ri}\, l'_i + M_{ri}\, m'_i + N_{ri}\, n'_i + P_{ri}\, p'_i + Q_{ri}\, q'_i + R_{ri}\, r'_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu) \qquad (r = 1, 2, \ldots \mu). \tag{1}$$

Moltiplichiamo queste equazioni per altrettanti coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$, da determinarsi a suo luogo, e sottraggiamole dalla (1, § 413), cioè, coi presenti simboli, da

$$\Sigma_i \left\{ \left(\int_{\tau_i} k \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau_i - \mathrm{X}_i \right) l'_i + \ldots + \left(\int_{\tau_i} k \left(y \frac{d^2 z}{d t^2} - z \frac{d^2 y}{d t^2}\right) d\tau_i - \mathrm{M}_{x i} \right) p'_i + \ldots \right\} = 0.$$

Otteniamo:

$$\Sigma_i \left\{ \left(\int_{\tau_i} k \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau_i - \mathrm{X}_i - \Sigma_r L_{ri} \lambda_r \right) l'_i \right.$$
$$+ \left(\int_{\tau_i} k \frac{d^2 y}{d t^2} d\tau_i - \mathrm{Y}_i - \Sigma_r M_{ri} \lambda_r \right) m'_i$$
$$+ \left(\int_{\tau_i} k \frac{d^2 z}{d t^2} d\tau_i - \mathrm{Z}_i - \Sigma_r N_{ri} \lambda_r \right) n'_i$$

$$+\left(\int_{\tau_i} k\left(y\frac{d^2 z}{dt^2}-z\frac{d^2 y}{dt^2}\right)d\tau_i-\mathrm{M}_{xi}-\Sigma_r P_{ri}\lambda_r\right)p'_i$$

$$+\left(\int_{\tau_i} k\left(z\frac{d^2 x}{dt^2}-x\frac{d^2 z}{dt^2}\right)d\tau_i-\mathrm{M}_{yi}-\Sigma_r Q_{ri}\lambda_r\right)q_i$$

$$+\left(\int_{\tau_i} k\left(x\frac{d^2 y}{dt^2}-y\frac{d^2 x}{dt^2}\right)d\tau_i-\mathrm{M}_{zi}-\Sigma_r R_{ri}\lambda_r\right)r'_i\Big\}=0.$$

Determiniamo ora i μ moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\mu$ colle condizioni che siano nulli i coefficienti di μ delle l'_i, m'_i, n'_i, p'_i q'_i, r'_i, nel primo membro della precedente equazione. I termini si ridurranno così a $6\nu - \mu$; ed essendo $6\nu - \mu$ delle stesse l'_i, m'_i, n'_i, p'_i, q'_i, r'_i suscettibili di valori indipendenti, per modo da poter supporre che tutti, tranne uno qualunque, ricevano il valor zero, dovrà in ciascun termine esser zero il coefficiente del parametro a cui il termine corrisponde.

Abbiamo quindi, in conclusione:

$$\left.\begin{aligned}
\int k\frac{d^2 x}{dt^2}d\tau_i &= \mathrm{X}_i+\Sigma_r L_{ri}\lambda_r,\\
\int k\frac{d^2 y}{dt^2}d\tau_i &= \mathrm{Y}_i+\Sigma_r M_{ri}\lambda_r,\\
\int k\frac{d^2 z}{dt^2}d\tau_i &= \mathrm{Z}_i+\Sigma_r N_{ri}\lambda_r,\\
\int k\left(y\frac{d^2 z}{dt^2}-z\frac{d^2 y}{dt^2}\right)d\tau_i &= \mathrm{M}_{xi}+\Sigma_r P_{ri}\lambda_r,\\
\int k\left(z\frac{d^2 x}{dt^2}-x\frac{d^2 z}{dt^2}\right)d\tau_i &= \mathrm{M}_{yi}+\Sigma_r Q_{ri}\lambda_r,\\
\int k\left(x\frac{d^2 y}{dt^2}-y\frac{d^2 x}{dt^2}\right)d\tau_i &= \mathrm{M}_{zi}+\Sigma_r R_{ri}\lambda_r,
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$(i=1, 2, \ldots \nu):$$

6ν equazioni, fra i ν gruppi di 6 parametri individuanti la posizione di ciascun corpo ad ogni istante, e i μ moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$.

I quali moltiplicatori, come immediatamente emerge dal confronto di queste equazioni colle (1, 2, § 413), determinano i risultanti delle pressioni vincolari, concepite applicate ai punti della

superficie dei singoli corpi, e dei loro momenti rispetto al punto preso per origine delle coordinate.

Le 6ν equazioni in discorso non sono così equazioni pure, secondo la nostra definizione; mentre $6\nu - \mu$ equazioni pure se ne possono concepire dedotte coll'eliminazione dei μ moltiplicatori.

Per le μ equazioni rimanenti, che occorrono per compire il sistema, stanno le conclusioni del § 425.

§ 451. — Facciamo un'applicazione importante. Siano x_i, y_i, z_i, le coordinate d'un certo punto dell'i^{mo} corpo, ed abbiano luogo le μ equazioni:

$$\left.\begin{array}{c} f_r(x_1, y_1, z_1, \dots x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0, \\ (r = 1, 2, \dots \mu) \end{array}\right\} \quad (1)$$

dove $f_r(x_1, y_1, z_1, \dots x_\nu, y_\nu, z_\nu, t)$ indica una funzione delle 3ν variabili corrispondenti, continua, finita, e dotata di derivate prime rispetto a ciascuna di esse, egualmente finite e continue, oltre di che, se occorre, esplicitamente del tempo t.

Ne viene (cfr. § 180):

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma_i \left(\frac{d f_r}{d x_i}\delta x_i + \frac{d f_r}{d y_i}\delta y_i + \frac{d f_r}{d z_i}\delta z_i\right) = 0; \\ (r = 1, 2, \dots \mu) \end{array}\right\} \quad (1)'$$

ossia:

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma_i \left\{ \frac{d f_r}{d x_i} l_i + \frac{d f_r}{d y_i} m'_i + \frac{d f_r}{d z_i} n'_i + \right. \\ \left. + \left(y_i \frac{d f_r}{d z_i} - z_i \frac{d f_r}{d y_i}\right) p'_i + \left(z_i \frac{d f_r}{d x_i} - x_i \frac{d f_r}{d z_i}\right) q'_i + \left(x_i \frac{d f_r}{d y_i} - y_i \frac{d f_r}{d x_i}\right) r'_i \right\} = 0. \\ (r = 1, 2, \dots \mu). \end{array}\right\} \quad (1)''$$

Quindi le formole precedenti si applicano senz'altro al caso in discorso, facendo:

$$L_{ri} = \frac{d f_r}{d x_i}, \qquad M_{ri} = \frac{d f}{d y_i}, \qquad N_{ri} = \frac{d f}{d z_i},$$

$$P_{ri} = y_i \frac{d f_r}{d z_i} - z_i \frac{d f_r}{d y_i}, \quad Q_{ri} = z_i \frac{d f_r}{d x_i} - x_i \frac{d f_r}{d z_i}, \quad R_{ri} = x_i \frac{d f_r}{d y_i} - y_i \frac{d f_r}{d x_i}.$$

E le (2) del precedente §, dove i coefficienti siano così determinati, insieme colle (1), formano un sistema di tante equazioni quante sono le incognite.

Stanno poi le (1)′, o (1)″, per l'atto di movimento effettivo ad ogni tempo t, quando le (1) non involgano esplicitamente il tempo t. E perciò, in tal caso, alle (1) si potranno sostituire le (1)″, applicate all'atto di movimento effettivo (cfr. § 425).

§ 452. — Tutto ciò sta egualmente, qualunque sia il punto (x_i, y_i, z_i) del corpo i^{mo}. Supposto che sia il centro di massa del corpo medesimo, le (2, § 471) diventano indicando con m_i la grandezza della massa del corpo i^{mo}:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = \mathbf{X}_i + \Sigma_r \frac{d f_r}{d x_i} \lambda_r,$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{d t^2} = \mathbf{Y}_i + \Sigma_r \frac{d f_r}{d y_i} \lambda_r,$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2} = \mathbf{Z}_i + \Sigma_r \frac{d f_r}{d z_i} \lambda_r,$$

$$(i = 1, 2, \ldots \nu).$$

E queste equazioni, nell'ipotesi che $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i$, non dipendano che dalle $x_1, y_1, z_1 \ldots x_\nu, y_\nu, z_\nu$, e, se occorre, dalle loro derivate rispetto al tempo, e dal tempo medesimo, serviranno per determinare ad ogni istante la posizione del centro di massa d'ogni corpo.

In tale ipotesi esse sono le così dette " equazioni di *Lagrange* del movimento di un sistema di punti materiali, fra le cui coordinate esistono delle equazioni ". È questa una espressione conforme alla definizione che abbiamo dato a suo luogo del punto materiale (§ 328, 329). D'altra parte, ammesso che basti conoscere il moto del centro di massa d'ogni corpo, come sarà nel caso che i corpi siano così piccoli da riuscire irrilevabile la distanza di due punti appartenenti ad uno stesso corpo, le equazioni determineranno il movimento del sistema.

Un corpo riunito ad un punto fisso mediante un filo teso.

§ 453. — Per corpo riunito ad un punto fisso mediante un filo teso s'intende un mobile ad un cui punto è imposta la condizione di mantenersi sopra una superficie sferica fissa, avente il centro nel punto fisso; e il filo si concepisce teso fra questo e il suddetto punto del mobile.

Indichi l la grandezza del raggio della superficie sferica, che misura la così detta " lunghezza del filo ": e, assunto per origine il centro, siano x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto vincolato del mobile.

Abbiamo, pel § precedente:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = l^2,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int k\,\frac{d^2 x}{dt^2}\,d\tau = \mathbf{X} + \lambda\frac{x_1}{l}, \quad \int k\,\frac{d^2 y}{dt^2}\,d\tau = \mathbf{Y} + \lambda\frac{y_1}{l}, \quad \int k\,\frac{d^2 z}{dt^2}\,d\tau = \mathbf{Z} + \lambda\frac{z_1}{l},\\
&\int k\left(y\,\frac{d^2 z}{dt^2} - z\,\frac{d^2 y}{dt^2}\right)d\tau = \mathbf{M}_x,\\
&\int k\left(z\,\frac{d^2 x}{dt^2} - x\,\frac{d^2 z}{dt^2}\right)d\tau = \mathbf{M}_y,\\
&\int k\left(x\,\frac{d^2 y}{dt^2} - y\,\frac{d^2 x}{dt^2}\right)d\tau = \mathbf{M}_z.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Le tre ultime esprimono che si verifica il teorema delle aree intorno ad ogni asse passante pel punto fisso (§ 419).

Esse poi, tenendo calcolo delle tre precedenti, si possono anche porre sotto la forma:

$$\int k\left((y - y_1)\,\frac{d^2 z}{dt^2} - (z - z_1)\,\frac{d^2 y}{dt^2}\right)d\tau = \mathbf{M}'_x,$$

$$\int k\left((z - z_1)\,\frac{d^2 x}{dt^2} - (x - x_1)\,\frac{d^2 z}{dt^2}\right)d\tau = \mathbf{M}'_y,$$

$$\int k\left((x - x_1)\,\frac{d^2 y}{dt^2} - (y - y_1)\,\frac{d^2 x}{dt^2}\right)d\tau = \mathbf{M}'_z,$$

dove $\mathbf{M}'_x$, $\mathbf{M}'_y$, $\mathbf{M}'_z$ indicano le componenti del risultante dei momenti delle forze esterne limite e pressioni prestabilite, rispetto al

punto vincolato; le quali equazioni, alla lor volta, esprimono che si verifica il teorema delle aree intorno ad ogni asse passante pel punto vincolato (§ 419).

Finalmente, introducendo la terna degli assi principali d'inerzia nel centro di massa, riconosciamo nel noto modo che la prima delle suddette equazioni, tenuto calcolo delle tre precedenti, si può porre sotto la forma:

$$\frac{d(P\mathfrak{p}\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\alpha_2 + R\mathfrak{r}\alpha_3)}{dt} = \overline{\mathrm{M}}_x + \frac{\mathrm{m}\lambda}{l}(y_1 z - z_1 y),$$

dove i simboli hanno il solito significato (cfr. § 445).

Quindi abbiamo il sistema d'equazioni del movimento, che altro non è che (1) sotto diversa forma:

$$\mathrm{m}\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = X + \frac{\lambda x_1}{l}, \qquad \mathrm{m}\frac{d^2\overline{y}}{dt^2} = Y + \frac{\lambda x_1}{l}, \qquad \mathrm{m}\frac{d^2\overline{z}}{dt^2} = Z + \frac{\lambda z_1}{l},$$

$$\frac{d(P\mathfrak{p}\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\alpha_2 + R\mathfrak{r}\alpha_3)}{dt} = \overline{\mathrm{M}}_x + \frac{\mathrm{m}\lambda}{l}(y_1\overline{z} - z_1\overline{y}),$$

$$\frac{d(P\mathfrak{p}\beta_1 + Q\mathfrak{q}\beta_2 + R\mathfrak{r}\beta_3)}{dt} = \overline{\mathrm{M}}_y + \frac{\mathrm{m}\lambda}{l}(z_1\overline{x} - x_1\overline{z}),$$

$$\frac{d(P\mathfrak{p}\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\gamma_2 + R\mathfrak{r}\gamma_3)}{dt} = \overline{\mathrm{M}}_z + \frac{\mathrm{m}\lambda}{l}(x_1\overline{y} - y_1\overline{x}),$$

cui si deve aggiungere la condizione:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = l^2,$$

e indicando con $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ le coordinate del punto vincolato rispetto alla terna degli assi principali d'inerzia nel centro di massa, le quali si debbono intendere date:

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{x} + \alpha_1\mathfrak{x} + \alpha_2\mathfrak{y} + \alpha_3\mathfrak{z}, \\ y_1 &= \overline{y} + \beta_1\mathfrak{x} + \beta_2\mathfrak{y} + \beta_3\mathfrak{z}, \\ z_1 &= \overline{z} + \gamma_1\mathfrak{x} + \gamma_2\mathfrak{y} + \gamma_3\mathfrak{z}, \end{aligned}$$

relazioni che permettono di eliminare immediatamente x_1, y_1, z_1.

Eseguita questa eliminazione e quella di α_i, β_i, γ_i mediante le relazioni del § 24, restano sei equazioni differenziali alle derivate ordinarie del 2.° ordine ed un'equazione di condizione fra i parametri individuanti la posizione del mobile, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, φ, f, θ, e la grandezza λ della così detta " tensione del filo ".

Notiamo il caso che il punto vincolato sia il centro di massa in cui la seconda terna d'equazioni differenziali si riduce a:

$$\frac{d\,(P\mathfrak{p}\,\alpha_1 + Q\mathfrak{q}\,\alpha_2 + R\mathfrak{r}\,\alpha_3)}{dt} = \overline{\mathbf{M}}x,$$

$$\frac{d\,(P\mathfrak{p}\,\beta_1 + Q\mathfrak{q}\,\beta_1 + R\mathfrak{r}\,\beta_3)}{dt} = \overline{\mathbf{M}}y,$$

$$\frac{d\,(P\mathfrak{p}\,\gamma_1 + Q\mathfrak{q}\,\gamma_2 + R\mathfrak{r}\,\gamma_3)}{dt} = \overline{\mathbf{M}}z;$$

che se il centro di massa è punto d'applicazione della risultante del sistema delle forze esterne limite applicato al mobile, come nel caso della gravità, e, se capita, delle pressioni prestabilite, emerge di qui che il movimento del mobile relativo ad una terna d'assi d'orientazione fissa coll'origine nel centro di massa, sarà il noto movimento relativo alla stessa terna " per inerzia " (§§ 354-363). Allora φ, f e θ essendo funzioni note di t, la prima terna e l'equazione di condizione, donde si concepiscano eliminate x_1, y_1, z_1, serviranno per determinare $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ e λ.

§ 454. — " Tensione del filo " si chiama il vettore:

$$\left(-\lambda\frac{x_1}{l},\quad -\lambda\frac{y_1}{l},\quad -\lambda\frac{z_1}{l}\right);$$

per modo che la congiungente il punto fisso col punto vincolato — ciò che si chiama, alla sua volta, il filo teso — ha ad ogni istante la direzione del vettore medesimo. Ne viene che, nell'ipotesi del corpo in equilibrio, la direzione di questa congiungente segna quella della risultante del sistema delle forze esterne limite e pressioni prestabilite, applicato ai punti del corpo (§ 423).

Filo a piombo.

§ 455. — " Filo a piombo " o " piombino " è un filo flessibile, che si fissa per un estremo, e si lascia distendere da un peso attaccato all' altro, finchè assume una posizione stabile.

Allora il grave è in equilibrio relativo ad una terna d'assi fissi al Globo Terreste, per rispetto al quale è fisso l'estremo sostenuto del piombino. Secondo quanto precede, il filo segna la direzione della gravità nel luogo considerato (cfr. §§ 454, 340); e si disporrà nel piano meridiano, formando nel senso d'alto in basso colla verticale egualmente volta, un angolo, dalla parte di mezzogiorno,* di grandezza sensibilmente rappresentata da

$$\frac{1}{2}\,\frac{\omega^2 a}{g}\,|\sin 2\alpha|,$$

dove g indica la grandezza dell'accelerazione di gravità nel luogo, a quella del raggio terrestre medio, ω quella della velocità angolare della rotazione diurna, e α la latitudine del luogo.

Pendolo semplice.

§ 456. — Movimento del " pendolo semplice „ si dice quello del centro di massa d'un corpo rigido, immaginato *per questo punto* riunito mediante un filo teso ad un punto fisso (§ 453), nell'ipotesi che sia determinato, in unione con questi vincoli, dalla gravità.

Preso il punto fisso per origine, e volto l'asse delle z come il filo a piombo, siano x, y, z le coordinate del punto vincolato, ed l la misura della lunghezza del filo, o " lunghezza del pendolo „. Avremo, rappresentando con λ il parametro, che, coi simboli precedenti, sarebbe invece da rappresentarsi con $\frac{\lambda}{m\,l}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \lambda x, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = \lambda y, \qquad \frac{d^2 z}{d t^2} = \lambda z + g. \tag{1}$$

Dalle prime due equazioni differenziali segue:

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt, \tag{2}$$

* Intendiamo per parte a mezzogiorno del meridiano d'un posto, in ogni caso, quella che interseca l'equatore.

dove c indica una costante; e da tutte e tre insieme, tenendo conto della condizione, per cui è:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

si deduce moltiplicandole per dx, dy, dz, sommandole, e poi integrando:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (2gz + h)\,dt^2, \qquad (3)$$

dove h è un'altra costante.

Osserviamo che (1) è l'integrale della conservazione delle aree nel piano xy, e (2) l'integrale della conservazione dell'energia (cfr. 419, 420).

Introduciamo le coordinate sferiche, ponendo:

$$x = l\cos\varphi\sin\theta, \quad y = l\sin\varphi\sin\theta, \quad z = l\cos\theta,$$

per modo che θ indica l'angolo formato dal filo col piombino, e φ l'angolo formato dal semipiano terminato al piombino contenente il filo col semipiano contenente l'asse delle x positive.

Le (2), (3) ricevono la forma:

$$l^2\sin^2\theta\,d\varphi = c\,dt,$$

$$l^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) = (2gl\cos\theta + h)\,dt^2.$$

E di qui si ricava:

$$d\varphi = \frac{c\,dt}{l^2\sin^2\theta}, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{g}{l}\cos\theta + \frac{h}{l^2} - \frac{c^2}{l^4\sin^2\theta}; \qquad (5)$$

la seconda delle quali fornisce t in funzione di θ mediante una quadratura: dopo di che, concependo θ come la funzione inversa di t, la prima fornirà, mediante un'altra quadratura, φ.

Per la (2), c è la componente secondo il filo a piombo del momento della velocità del punto mobile, ad esso punto applicata, rispetto al punto fisso come polo. E perciò sarà $c = 0$ quando ad un istante la velocità del punto considerato o sia nulla, o sia nel piano passante per esso e pel punto fisso parallelo al filo a piombo.

In tale ipotesi la (4) dà:

$$\varphi = Cost.$$

e cioè la trajettoria del punto sarà in detto piano.

La (5) poi si riduce a:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{g}{l}\cos\theta + \frac{h}{l^2}.$$

E questa è l'equazione considerata nel § 437 e seguenti; per modo che il movimento del punto che abbiamo chiamato indice altro non è che quello d'un pendolo semplice la cui lunghezza è misurata da:

$$l = \frac{K}{ms},$$

ed eguale la posizione e la velocità ad un istante. Perciò la lunghezza misurata da l così definita pel pendolo propriamente detto * si suol chiamare la " lunghezza del pendolo semplice equivalente „.

§ 457. — Nell'ipotesi che la direzione del filo si scosti pochissimo da quella del filo a piombo, supporremo θ così piccolo da poter sensibilmente trascurare l'aggiunta delle sue potenze superiori alla prima. Con ciò, essendo $l - z = l(1 - \cos\theta)$, si ha, innanzi tutto, sensibilmente $z = l$; in conseguenza di che la terza delle (1) fornisce, colla stessa approssimazione:

$$\lambda = -\frac{g}{l},$$

e le prime due diventano:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{l}y = 0.$$

Queste sono le equazioni d'un movimento centrale (§ 197), in cui l'accelerazione è costantemente volta verso il centro, e di

---

* Questo si chiama spesso " pendolo composto „: qualifica che abbiamo creduto di abbandonare, pur mantenendo quella di semplice, nel caso trattato nel § presente, che riesce opportuna per indicare la semplicità delle ipotesi relative. Il termine " pendolo sferico „ o " conico „ è forse più appropriato per un solido grave avente un punto fisso, a cui si applicano i §§ 426-430.

grandezza direttamente proporzionale alla distanza del punto dal centro medesimo. Esse forniscono immediatamente:

$$x = A \cos \sqrt{\frac{l}{g}}\, t + B \sin \sqrt{\frac{l}{g}}\, t, \qquad y = A' \cos \sqrt{\frac{l}{g}}\, t + B' \sin \sqrt{\frac{l}{g}}\, t;$$

dalle quali si deduce subito che la traiettoria è un'ellisse col centro sul filo a piombo. Per la qual ragione il movimento in discorso si dice talvolta " vibratorio ellittico ". E si chiama anche " armonico ": perchè di tale forma è il più semplice movimento dei punti d'un corpo sonoro.

La durata d'una mezza rivoluzione risulta poi di grandezza:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

indipendente dall'ampiezza; ciò che costituisce, in un nuovo caso, la proprietà, già incontrata, dell'isocronismo delle piccole oscillazioni (§ 443).

Pendolo di Foucault.

§ 458. — L'effetto della forza centrifuga composta non è trascurabile nel movimento relativo ad una terna d'assi fissi al Globo quando la sua durata è sufficientemente lunga, come può essere il moto oscillatorio d'un corpo sospeso colle debite precauzioni per diminuire fin ch'è possibile l'attrito dei sostegni. Indagheremo ora il moto determinato dalla gravitazione verso il Globo Terrestre del centro di massa d'un solido, concepito riunito per questo punto mediante un filo teso ad un punto fisso rispetto ad una terna d'assi invariabilmente unita al Globo. Per semplicità supporremo l'angolo formato dal filo col filo a piombo abbastanza piccolo per poter trascurare sensibilmente l'aggiunta delle grandezze dell'ordine del suo quadrato.

Sia l'origine la posizione del centro di massa corrispondente all'equilibrio stabile: l'asse delle $\mathfrak{z}$ orientato come il filo a piombo: l'asse delle $\mathfrak{x}$ nel meridiano, volto verso nord: l'asse delle $\mathfrak{y}$ volto verso est.* Indichi al solito ω la misura della velocità

* Cf. § 344; nota a piedi di pagina.

angolare della rotazione diurna, e γ quella dell'angolo formato dall'orientazione opposta al filo a piombo colla traccia del meridiano sul parallelo del luogo, volta all'infuori dell'asse, — assai prossimamente la latitudine del luogo medesimo (§ 340).

Le equazioni del movimento relativo del centro di massa saranno (cfr. §§ 411, 453, 344):

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = -2\omega \sin\gamma \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \lambda\mathfrak{x},$$

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = 2\omega\left(\sin\gamma \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \cos\gamma \frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right) + \lambda\mathfrak{y}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = g - 2\omega\cos\gamma \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \lambda(\mathfrak{z} + l),$$

cui va aggiunto:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + (\mathfrak{z} + l)^2 = l^2.$$

Dalle tre equazioni differenziali, tenendo calcolo della condizione, segue:

$$d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 + d\mathfrak{z}^2 = (2g\mathfrak{z} + H)\,dt^2. \qquad (1)$$

Inoltre da prima e seconda:

$$\mathfrak{x}\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} - \mathfrak{y}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = 2\omega\sin\gamma\left(\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right) + 2\omega\cos\gamma\,\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Ora dalla condizione si deduce, trascurando l'aggiunta di $\frac{\mathfrak{z}}{l}$ a 2:

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}{2l}, \qquad \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}}{l}.$$

Quindi, ommettendo l'aggiunta di termini sensibilmente trascurabili per l'ipotesi premessa:

$$\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}\,d\mathfrak{x} = \left((\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)\,\omega\sin\gamma + c\right)dt.$$

D'altra parte, nelle stesse ipotesi, la (1) si riduce a:

$$d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 = \left(\frac{g}{l}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) + H\right)dt^2.$$

Poniamo:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} \cos \varphi, \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{r} \sin \varphi,$$

per modo che $\mathfrak{r}$ e φ siano la grandezza della distanza della proiezione del punto mobile sul piano perpendicolare al filo a piombo passante per la sua posizione corrispondente all'equilibrio stabile dalla posizione medesima (sensibilmente la distanza delle posizioni analoghe del punto stesso) e la misura dell' angolo che il semipiano terminato all'asse delle $\mathfrak{z}$ e contenente il punto forma col semipiano contenente l'asse delle $\mathfrak{x}$ positive, angolo che, dovendo crescere nel senso conducente per l' angolo retto dall'asse delle $\mathfrak{x}$ all'asse delle $\mathfrak{y}$, risulta crescente da nord verso est.

Le precedenti equazioni prendono la forma:

$$\mathfrak{r}^2 (d\varphi - \omega \sin \gamma \, dt) = c\,dt,$$

$$d\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2 d\varphi^2 = \left(\frac{g}{l} \mathfrak{r}^2 + H\right) dt^2.$$

Facciamo:

$$\varphi - \omega \sin \gamma \, . \, t = \chi.$$

Esse con ciò diventano:

$$\mathfrak{r}^2 d\chi = c\,dt,$$

$$d\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2 d\chi^2 = \left(\frac{g}{l} \mathfrak{r}^2 + h\right) dt^2;$$

nella seconda delle quali si è posto:

$$H - 2c\omega \sin \gamma = h,$$

e fu ommessa l'aggiunta di $\omega^2 \sin \gamma$.

Queste equazioni non cambiano *di forma* supponendo $\omega = 0$, nel qual caso determineranno *un* moto vero del pendolo (§ 455); solo allora a χ si sostituisce φ. E poichè χ è l' angolo formato al tempo t dal semipiano terminato al filo a piombo pendente dal punto di sospensione e contenente il punto mobile, con un semipiano terminato allo stesso filo a piombo, che gira intorno ad esso come asse da nord verso est nell'emisfero boreale, e da sud verso est nell'emisfero australe, con velocità angolare di grandezza $\omega |\sin \gamma|$, concludiamo che, se il moto del pendolo relativo

al Globo Terrestre si riferisce alla terna d'assi formata dal filo a piombo in discorso, e da due assi ruotanti intorno ad esso con velocità angolare di grandezza $\omega |\sin\gamma|$ nel suddetto senso, il moto relativo così definito sarà un moto *vero* possibile dello stesso pendolo, cioè un moto ch'esso può presentare sulla Terra supposta ferma. E ciò si esprime anche dicendo che il moto del pendolo, com'è percepito da un osservatore partecipante al movimento diurno del Globo Terrestre, riesce lo stesso come se il pendolo compiesse effettivamente un certo altro suo movimento possibile, e il Globo girasse intorno ad un asse passante pel punto di sospensione e diretto come il filo a piombo, con velocità angolare di grandezza $\omega |\sin\gamma|$ nel senso del movimento apparente del sole.

Ciò è quanto risulta dagli esperimenti di *Foucault* (1851).

Notiamo che nel caso di $c = 0$, cioè che la velocità iniziale *relativa* del punto sia nel piano passante pel filo a piombo pendente dal punto di sospensione, oppure sia nulla, essendo $H = h$, il suddetto moto vero possibile è quello che corrisponde a condizioni iniziali *vere* conformi alle relative supposte. *

Resistenza dell'ambiente e attrito.

§ 459. — Il movimento d'un corpo in seno all'aria (o ad altro analogo ambiente), involgendo il moto di questo, appartiene più propriamente all'Idrodinamica. Tuttavia, subordinatamente a certe restrizioni, si può trattare anche coi principii esposti in questo capitolo, assumendo *a priori*, per tradurre l'influenza dell'ambiente, un sistema opportuno di pressioni applicato alla superficie del corpo, che perciò sosterranno la parte di pressioni prestabilite. La pressione specifica in un punto si chiamerà " resistenza specifica dell'ambiente „ in quel punto; e analogamente tutti gli elementi che vi si collegano.

§ 460. — " Attrito di due solidi a mutuo contatto „ si chiama in generale quella particolare condizione fisica, per cui

* Cfr. *Kirchhoff* — *Mechanik.* 9te Vorles.

il movimento di due solidi le cui superficie si toccano devia più o meno sensibilmente dalle leggi conformi all'ipotesi del corrispondente vincolo geometrico. Per la qual ragione il movimento secondo questa ipotesi si dice anche " senza attrito „. Anche il movimento subordinato all'attrito si calcola col sussidio di un sistema di pressioni prestabilite, che si concepisce applicato alla superficie (se occorre, passando al limite, nel senso a suo luogo indicato). Notiamo che la ragione più prossima del diverso modo di comportarsi di due solidi a contatto si deve cercare nelle deformazioni, per quanto piccole, in prossimità dei punti di contatto; e che il problema, studiato in base a queste ipotesi (ciò che non s'è ancor potuto fare), apparterrebbe alla teoria dell'elasticità.

§ 461. — Il procedimento di cui qui discorriamo fonda la determinazione del sistema di pressioni prestabilite, convenienti ai due casi, sopra le " leggi della resistenza dei mezzi „ e le " leggi dell'attrito „, a seconda del caso, direttamente ricavate dall'esperienza. Si riesce così a render ragione di diversi fenomeni, non solo: ma anche, nei singoli casi, tenendo calcolo delle particolari circostanze, a calcolare il movimento con precisione sufficiente alle esigenze della pratica. Qual'è, ad esempio, il caso della Balistica, che studia il movimento dei projettili, nell'ipotesi che, sotto la condizione della rigidità, sia determinato dalla gravità e dalla resistenza dell'aria. Però leggi abbastanza generali, e ad un tempo sicure, non si può affermare che si possiedano ancora. Così, per l'attrito, occorre una diversa ipotesi *a priori*, secondo che si ammette l'equilibrio o il movimento, (" attrito statico „ e " dinamico „), e questo implica uno strisciamento, o si riduce ad un semplice rotolamento (" attrito radente „ ed " evolvente „): oltre di che le leggi riescono dipendenti da certi termini, fra cui varia la grandezza della velocità del punto di contatto, concepito come appartenente all'uno o all'altro corpo.

§ 462. — Ora, abbiamo accennato quale sarebbe il procedimento più naturale pel calcolo di questi movimenti. D'altra parte, l'esperienza constata che il movimento subordinato alla resistenza dell'ambiente e all'attrito, è costantemente accompa-

gnato da una produzione di calore, e conduce a stabilire l'equazione:

$$T - T_0 + EQ = L_\varepsilon;$$

dove, escluse le pressioni che non siano le vincolari, L_ε rappresenta la misura del lavoro delle forze esterne limite rispetto a ciascun solido corrispondente al movimento del sistema da una posizione ad un'altra: $T - T_0$ e Q, quella dell'aumento di forza viva e della quantità di calore relative: E, un numero corrispondente all'unità derivata $[L\,Q^{-1}]$, indicando con $[L]$, $[Q]$ le unità di lavoro e di calore, e d'altronde invariabile, che, col chilogrammetro (§ 348) e la caloria,* risulta prossimamente 424 — il così detto " equivalente meccanico della caloria ". Donde scaturisce, indicando con L_n la misura del lavoro delle pressioni di resistenza o d'attrito:

$$L_n = - EQ.$$

E ciò induce a supporre che il calore che si produce nei movimenti subordinati alla resistenza dei mezzi e all'attrito sia la manifestazione della forza viva d'un movimento delle parti del corpo e del lavoro delle relative forze; il quale, tutto che corrisponda a spostamenti estremamente piccoli, implica però una notevole quantità d'energia, per modo che il movimento sensibile forma un lato troppo parziale del fenomeno reale per rivelare quei rapporti generali, a cui noi conferiamo l'attributo di leggi fondamentali della natura (§ 321).

Movimento traslatorio di una sfera omogenea in un mezzo resistente.

§ 463. — Nel caso di un solido sferico omogeneo in movimento traslatorio in un mezzo resistente, supposto il valor assoluto della velocità dei punti ad ogni istante inferiore ad un certo termine, e assai grande il rapporto della massa dalla sfera

* Quantità di calore necessaria per elevare la temperatura di un chilogramma d'acqua da 0° ad 1° della scala centigrada.

a quella d'un egual volume del mezzo, giova l'ipotesi che la pressione specifica in ogni punto dell'emisfero tagliato dal piano diametrale perpendicolare alla velocità, dalla parte verso cui la velocità è volta, abbia l'orientazione del raggio descritto dal punto al centro, e grandezza rappresentata dal prodotto d'una costante specifica per la grandezza della componente della velocità secondo questo raggio, mentre sia nulla nei punti dell'emisfero opposto. In altre parole, indicando con v la grandezza della velocità al tempo qualunque t, con i l'angolo formato da essa col raggio descritto dal punto (x, y, z) della superficie al centro, con n il raggio medesimo, sarà, nei punti del primo emisfero, allo stesso tempo t:

$$X_n = -\rho \, \mathrm{v} \cos i \cos (nx),$$
$$Y_n = -\rho \, \mathrm{v} \cos i \cos (ny),$$
$$Z_n = -\rho \, \mathrm{v} \cos i \cos (nz),$$

dove ρ dinota una costante positiva, per modo che, essendo i ottuso o retto, $-\rho \, \mathrm{v} \cos i$ rappresenta la grandezza della pressione specifica; e nell'emisfero opposto, in ogni punto:

$$X_n = 0, \qquad Y_n = 0, \qquad Z_n = 0.$$

Ne viene, valendosi di:

$$\cos i = \frac{1}{\mathrm{v}} \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \cos (nx) + \frac{d\bar{y}}{dt} \cos (ny) + \frac{d\bar{z}}{dt} \cos (nz) \right),$$

dove $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ indicano al solito le coordinate del centro di massa: e, inteso che σ rappresenti l'area d'un emisfero, di

$$\int \cos^2 (nz) \, d\sigma = \frac{2}{3} \pi R^2,$$

$$\int \cos (nx) \cos (ny) \, d\sigma = \int \cos (nx) \cos (nz) \, d\sigma = 0,$$

con R indicando la grandezza del raggio della sfera, che le componenti della risultante delle supposte pressioni applicate alla superficie del mobile saranno semplicemente:

$$-\frac{2}{3} \pi R^2 \rho \frac{d\bar{x}}{dt}, \quad -\frac{2}{3} \pi R^2 \rho \frac{d\bar{y}}{dt}, \quad -\frac{2}{3} \pi R^2 \rho \frac{d\bar{z}}{dt}.$$

Si ha poi senz'altro, pur di supporre che la pressione specifica in discorso abbia, in ogni punto della superficie, la direzione del raggio, che sarà nullo il risultante dei momenti delle stesse pressioni rispetto al centro di massa come polo (§ 302). E allora, se il risultante dei momenti delle forze, e delle altre pressioni, se ve ne sono, applicate ai punti del corpo rispetto allo stesso centro di massa è parimente nullo — nel caso, per esempio, della semplice gravità — verificandosi il teorema della conservazione delle aree pel movimento relativo ad una terna d'assi d'orientazione fissa coll'origine nel centro di massa, l'ipotesi che il movimento assoluto sia traslatorio si traduce in quella che la forza viva di questo movimento relativo ad un istante sia nulla, ossia che ad un istante — l'istante iniziale — il corpo sia in atto di movimento traslatorio (cfr. § 315).

§ 464. — Supponiamo il caso della gravità, senza alcun vincolo geometrico, oltre la condizione della rigidità. Orientato l'asse delle z come il filo a piombo, il movimento sarà determinato dalle equazioni:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -\varkappa\frac{d\bar{x}}{dt}, \qquad \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = -\varkappa\frac{d\bar{y}}{dt}, \qquad \frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = g - \varkappa\frac{d\bar{z}}{dt},$$

dove, indicate per un momento con m e k la grandezza della massa e della densità per modo che $m = \frac{4}{3}\pi R^3 k$, si è posto:

$$\varkappa = \frac{\rho}{2kR}; \tag{1}$$

alle quali, intendendo assunto il posto iniziale del centro di massa per origine, e il piano xz orientato secondo la velocità iniziale, si debbono aggiungere le condizioni:

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{lll} \bar{x} = 0, & \bar{y} = 0, & \bar{z} = 0, \\ \frac{d\bar{x}}{dt} = u_0, & \frac{d\bar{y}}{dt} = 0, & \frac{d\bar{z}}{dt} = w_0. \end{array} \right.$$

La prima equazione, tenuto calcolo di queste condizioni, fornisce senz'altro:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = u_0 - \varkappa\bar{x}, \qquad \varkappa\bar{x} = u_0\left(1 - e^{-\varkappa t}\right): \tag{2}$$

la seconda:

$$\bar{y} = 0,$$

esprimenti che la traiettoria sarà contenuta nel piano passante pel posto iniziale parallelo al filo a piombo e alla velocità iniziale: la terza dà:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = w_0 + gt - \varkappa\bar{z},$$

che si può porre immediatamente sotto la forma:

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{d(\varkappa\bar{z} - gt)}{dt} = w_0 - \frac{g}{\varkappa} + gt - \varkappa\bar{z},$$

donde scaturisce:

$$\varkappa\bar{z} = gt + \left(w_0 - \frac{g}{\varkappa}\right)(1 - e^{-\varkappa t}). \qquad (3)$$

Eliminando t fra la seconda delle (2) e (3) otteniamo:

$$\varkappa\bar{z} = \frac{\varkappa}{u_0}\left(w_0 - \frac{g}{\varkappa}\right)\bar{x} + \frac{g}{\varkappa}\log\frac{u_0}{u_0 - \varkappa\bar{x}},$$

equazione ordinaria della traiettoria nel proprio piano. Per le stesse equazioni, questa linea risulta aver un assintoto parallelo al filo a piombo, alla distanza dalla parallela passante pel punto iniziale la cui grandezza è $\frac{u_0}{\varkappa}$, dalla parte verso cui la velocità iniziale è volta. Inoltre:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = u_0 e^{-\varkappa t}, \qquad \frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{g}{\varkappa} + \left(w_0 - \frac{g}{\varkappa}\right)e^{-\varkappa t}, \qquad (4)$$

per modo che, col crescere infinitamente di t, le componenti della velocità secondo un asse perpendicolare e parallelo al filo a piombo hanno rispettivamente per limite zero e $\frac{g}{\varkappa}$, e la forza viva avrà quindi per limite $\frac{1}{2}m\frac{g^2}{\varkappa^2}$.

Ne viene che, dopo un tempo abbastanza lungo, il movimento sarà sensibilmente rettilineo uniforme; ciò che l'esperienza verifica, per esempio, nel movimento della pioggia e della gran-

dine in prossimità del suolo, come pure nella caduta dei proiettili lanciati a grande altezza.

Notiamo infine che, per (1), con R assai piccolo, sarà $\varkappa$ così grande da riuscire sensibilmente, come emerge immediatamente da (3):

$$\varkappa \dot{z} = gt + w_0 (1 - e^{-\varkappa t}):$$

per la qual relazione e la seconda delle (2), se la velocità iniziale è nulla, lo spostamento in un tempo abbastanza breve sarà insensibile; ciò che è pure conforme all'esperienza.

§ 465. — Facciamo anche un'applicazione al " pendolo semplice in un mezzo resistente "; e cioè consideriamo il caso della gravità, e del vincolo che il centro della sfera sia riunito mediante un filo teso ad un punto fisso (§ 453), nell'ipotesi, per maggior semplicità, che la direzione del filo si sposti pochissimo da quella del filo a piombo. In tal caso, scelti gli assi come al § 455, abbiamo, analogamente al § 456, $z = l$, in seguito a che:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \varkappa \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{g}{l}\bar{x} = 0, \qquad \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + \varkappa \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{g}{l}\bar{y} = 0;$$

le quali forniscono, col noto procedimento d'integrazione delle equazioni lineari a coefficienti costanti, inteso che sia $g\varkappa^2 < 4l$:

$$x = e^{-\frac{\varkappa}{2}t}\left(A\cos\frac{t}{2\mathrm{T}} + B\sin\frac{t}{2\mathrm{T}}\right),$$

$$y = e^{-\frac{\varkappa}{2}t}\left(A'\cos\frac{t}{2\mathrm{T}} + B'\sin\frac{t}{2\mathrm{T}}\right),$$

dove:

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{l}{g} - \frac{\varkappa^2}{4}},$$

e, con $\varkappa$ assai piccolo, approssimativamente:

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Così, T riesce la grandezza della durata del mezzo giro del raggio perpendicolare al filo a piombo passante pel punto

mobile. E si presenta un'altra volta la proprietà dell'isocronismo delle piccole oscillazioni; colla circostanza particolare che l'ampiezza cambia nel corso dello stesso movimento considerato.

Difatti, col crescere infinitamente di t, tendendo $e^{-\frac{x}{2}t}$ a zero, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ svaniscono; cioè le oscillazioni vanno restringendosi sempre più, finchè il moto sensibilmente si estingue.

Movimento subordinato all'attrito di un corpo di superficie convessa rotolante sopra un piano.

§ 466. — Un corpo la cui superficie è tutta convessa, vincolato a mantenersi tangente ad un piano, si dice che, su questo piano, rotola senza strisciare, quando la velocità del punto di contatto è costantemente nulla: e diversamente che striscia. In questo caso dalle " leggi di *Coulomb* „ si ricava che la pressione d'attrito applicata alla superficie ha grandezza rappresentata dal prodotto d'una costante specifica — " coefficiente d'attrito „ — per la grandezza della pressione traducente il vincolo perfetto del contatto (§ 447), e orientazione contraria a quella della velocità del punto di contatto: oltre di che si ammette che, come la pressione suddetta, abbia il punto di contatto per punto d'applicazione. Quest'ultima ipotesi, e quella che la pressione stessa sia parallela al piano si mantengono anche nel primo caso: in seguito a che la condizione che la velocità del punto di contatto sia costantemente nulla forma insieme colle equazioni del movimento un sistema sufficiente per determinare completamente l'orientazione e la grandezza. Finalmente si ammette che, se nel moto con strisciamento la velocità del punto di contatto ad un istante si annulla, d'allora in poi il corpo rotola senza strisciare.

§ 467. — Consideriamo il movimento determinato dalle gravità e dall'attrito di una sfera omogenea vincolata a serbarsi appoggiata ad un piano perpendicolare al filo a piombo.

In questo caso il centro di massa è il centro di figura: il momento d'inerzia relativo ad ogni asse passante pel centro ha

valore costante, rappresentato, indicando con R, m e k la grandezza del raggio, della massa e della densità della sfera, da

$$k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^R r^4 dr = k.2\pi.\frac{4}{3}.\frac{R^5}{5} = \frac{2}{5}\,\mathrm{m}R^2:$$

finalmente il punto di contatto è costantemente la proiezione del centro sul piano, le cui coordinate relative ad una terna d'assi ortogonali coll'origine nel centro e l'asse delle z orientato in senso opposto al filo a piombo — dalla parte del piano da cui s'intende trovarsi la sfera — saranno quindi o, o, $-R$.

Sia l'asse delle z della terna fissa orientato come il precedente, e il piano resistente assunto per piano xy. Indicheremo con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, al solito, le coordinate del centro di massa, e con u, v, w le componenti della sua velocità, per modo che

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = u, \qquad \frac{d\bar{y}}{dt} = v, \qquad \frac{d\bar{z}}{dt} = w; \tag{1}$$

inoltre, con p, q, r le componenti della velocità angolare del mobile secondo quegli assi: onde, concepita un terna d'assi ortogonali coll'origine nel centro, fissa alla sfera, e indicato con α_i, β_i, γ_i, $(i = 1, 2, 3)$ i loro coseni di direzione al tempo t, e con $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ le componenti della velocità angolare suddetta secondo tre assi aventi la loro orientazione al tempo t, sarà:

$$p = \alpha_1\mathfrak{p} + \alpha_2\mathfrak{q} + \alpha_3\mathfrak{r}, \quad q = \beta_1\mathfrak{p} + \beta_2\mathfrak{q} + \beta_3\mathfrak{r}, \quad r = \gamma_1\mathfrak{p} + \gamma_2\mathfrak{q} + \gamma_3\mathfrak{r}. \tag{2}$$

La risultante delle forze esterne applicate ai punti del corpo è il peso: quindi le sue componenti secondo gli assi fissi o, o, $-\mathrm{m}g$; e il risultante dei momenti delle stesse forze rispetto al centro di massa riesce nullo.

Indichiamo con $\mathrm{m}\,\Xi$, $\mathrm{m}\,\Upsilon$, $\mathrm{m}\,Z$ le componenti secondo i medesimi assi della risultante delle pressioni d'attrito applicate ai punti della superficie, o pressione d'attrito. In ogni caso, vi sia strisciamento o no (§ 466), sarà $Z = 0$, e il punto di contatto sarà punto d'applicazione della risultante in discorso, per modo che il risultante dei momenti rispetto al centro di massa avrà per componenti secondo gli assi coordinati $\bar{z}\mathrm{m}\Upsilon$, $-\bar{z}\mathrm{m}\,\Xi$, o.

Ora, abbiamo in primo luogo:

$$z = R,$$

donde:

$$\frac{dz}{dt} = w = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Ne viene:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + mg = mg;$$

e cioè, la componente perpendicolare al piano della pressione d'attrito essendo nulla, la reazione del piano (§ 447) è costante, eguale ed opposta al peso del corpo.

Questo risultato sta egualmente nell'ipotesi dell'attrito nullo (§ 449). D'altra parte, le componenti della velocità del punto di contatto al tempo t sono espresse da

$$u - Rq, \qquad v + Rp, \qquad 0.$$

Quindi, nell'ipotesi che non sia:

$$u - Rq = 0, \qquad v + Rp = 0, \tag{3}$$

sarà:

$$\Xi = -\mu g \frac{u - Rq}{\mathrm{v}}, \qquad \Upsilon = -\mu g \frac{v + Rp}{\mathrm{v}}, \tag{4}$$

dove:

$$\mathrm{v} = \sqrt{(u - Rq)^2 + (v + Rp)^2},$$

e μ dinota una costante numerica positiva.

Se invece ad un istante si verificano le (3), staranno dall'istante medesimo in poi, e costituiranno così due condizioni del movimento: mentre cesseranno d'esser date *a priori* le (4).

Tutto ciò premesso, abbiamo il sistema d'equazioni (§ 445):

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{du}{dt} = \Xi, & \dfrac{dv}{dt} = \Upsilon, & \\ \dfrac{2}{5} R \dfrac{dp}{dt} = -\Upsilon, & \dfrac{2}{5} R \dfrac{dq}{dt} = \Xi, & \dfrac{dr}{dt} = 0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

cui aggiungeremo le condizioni iniziali:

$$t = 0: \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0.$$

L'ultima equazione fornisce senz'altro:

$$r = r_0. \tag{6}$$

Confrontando poi la quarta colla prima e la terza colla seconda, otteniamo:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2}{5} R \frac{dq}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{2}{5} R \frac{dp}{dt}.$$

E di qui, integrando:

$$u - u_0 = \frac{2}{5} R (q_0 - q), \qquad v - v_0 = \frac{2}{5} R (p - p_0); \tag{7}$$

relazioni fra la velocità del centro e la velocità angolare, che stanno in ogni caso. Notiamo come in conseguenza di esse e di (6), ogniqualvolta l'una riprende un valore, l'altra riprenderà il valore corrispondente.

Per queste relazioni:

$$u - Rq = \frac{7}{2} (u - a), \qquad v + Rp = \frac{7}{2} (v - b), \tag{8}$$

dove:

$$a = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} u_0 + R q_0 \right), \qquad b = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} v_0 - R p_0 \right). \tag{9}$$

Supponiamo ora che non si verifichino le (3), e stiano quindi *a priori* le (4): cioè il caso dello strisciamento. Per le precedenti relazioni, le prime due delle (5) diventano:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \mu g \frac{a - u}{\sqrt{(a - u)^2 + (b - v)^2}}, \\ \frac{dv}{dt} &= \mu g \frac{b - v}{\sqrt{(a - u)^2 + (b - v)^2}}, \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Ne viene:

$$\frac{du}{dv} = \frac{a - u}{b - v};$$

e integrando:

$$\frac{a-u}{b-v} = Cost. = \frac{a-u_0}{b-v_0},$$

Quindi, posto:

$$\sqrt{(a-u_0)^2+(b-v_0)^2} = \Delta,$$

l'accelerazione del centro ha grandezza e orientazione costante: la prima rappresentata da μg, e la seconda definita dai coseni di direzione:

$$\frac{a-u_0}{\Delta}, \qquad \frac{b-v_0}{\Delta}, \qquad 0.$$

Il movimento del centro della sfera, finchè durano le condizioni in discorso, sarà dunque il noto movimento parabolico (§ 196), e, come caso particolare, rettilineo uniformemente accelerato.* Questo avverrà sotto la condizione che sia $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, cioè all'istante iniziale nulla la velocità del centro, ossia l'atto di movimento iniziale rotatorio coll'asse passante pel centro; oppure $a - u_0 : b - v_0 = u_0 : v_0$, cioè $a : b = u_0 : v_0$, e per (9):

$$u_0 p_0 + v_0 q_0 = 0, \tag{11}$$

esprimente che la velocità angolare all'istante iniziale o è nulla, cioè l'atto di movimento iniziale traslatorio, o perpendicolare alla velocità del centro.

Così, le (10) si possono porre sotto la forma:

$$\frac{du}{dt} = \mu g \frac{a-u_0}{\Delta}, \qquad \frac{dv}{dt} = \mu g \frac{b-v_0}{\Delta};$$

dalle quali si ricava integrando:

$$u - u_0 = \mu g \frac{a-u_0}{\Delta} t, \qquad v - v_0 = \mu g \frac{b-v_0}{\Delta} t; \tag{12}$$

e introducendo queste espressioni nelle (7), se ne ricaverà p, q parimente rappresentate da semplici funzioni lineari di t.

---

* Teorema di *G. A. Euler*.

Per le stesse espressioni e le (1), inteso che per $t = 0$ sia $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{y} = \bar{y}_0$, si ha:

$$\bar{x} - \bar{x}_0 = u_0 t + \frac{\mu g}{2} \frac{a - u_0}{\Delta} t^2, \qquad \bar{y} - \bar{y}_0 = v_0 t + \frac{\mu g}{2} \frac{b - v_0}{\Delta} t^2. \quad (13)$$

Finalmente, concependo introdotte nelle equazioni generali (1, § 160) le espressioni di $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ che forniscono le (2), mediante le suddette di p, q, e $r = r_0$, secondo (5), esse formeranno un sistema d'equazioni atto a determinare gli angoli φ, f, θ.

Ora, se nelle (9) si fa:

$$u = Rq, \qquad v = -Rp,$$

si ottiene:

$$u = a, \qquad v = b;$$

per modo che a, b altro non sono che le componenti della velocità del centro, quando la velocità del punto di contatto è nulla.

Per questi valori di u, v le (12) forniscono:

$$t = \frac{\Delta}{\mu g};$$

e per questo valore di t, le (13):

$$\bar{x} - \bar{x}_0 = \frac{u_0 + a}{2\mu g} \Delta, \qquad \bar{y} - \bar{y}_0 = \frac{v_0 + b}{2\mu g} \Delta;$$

con che si ha l'istante a cui cessa lo strisciamento, e la projezione del centro sul piano, cioè il posto del contatto, a quell'istante.

Da quell'istante in poi, cioè per $t > \frac{\Delta}{\mu g}$, valgono le (3); donde scaturisce;

$$\frac{du}{dt} = R \frac{dq}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = -R \frac{dp}{dt}.$$

Confrontando le quali formole colle prime quattro delle (5), si ottiene senz'altro:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = 0.$$

Ne viene:

$$u = a, \qquad\qquad v = b,$$

$$\bar{x} - \bar{x}_0 = \frac{u_0}{2 \mu g} \Delta + a t, \qquad \bar{y} - \bar{y}_0 = \frac{v_0}{2 \mu g} \Delta + b t,$$

per modo che, cominciando da quell' istante, il movimento del centro è rettilineo uniforme secondo la tangente alla trajettoria nel posto corrispondente all' istante medesimo, e colla relativa velocità.

Inoltre, indicando con p_1, q_1 i valori di p, q per $t = \frac{\Delta}{pg}$:

$$p = p_1, \qquad\qquad q = q_1;$$

dalle quali relazioni e da (6) si deduce che il movimento relativo ad una terna d'assi d'orientazione fissa coll'origine nel centro è rotatorio uniforme, colla velocità angolare corrispondente all' istante in discorso, intorno ad un asse passante pel punto a contatto col piano.

Notiamo che, supposto:

$$\frac{5}{2} u_0 = - R q_0, \qquad\qquad \frac{5}{2} v_0 = R p_0,$$

da una parte si verificherà (11), per modo che il movimento del centro per $t < \frac{\Delta}{\mu g}$ sarà rettilineo uniformemente accelerato: dall' altra, si ha $a = 0$, $b = 0$, e cioè per $t > \frac{\Delta}{\mu g}$ il centro si mantiene fisso, e il movimento si riduce rotatorio uniforme intorno alla perpendicolare al piano passante pel punto di contatto.

Questa ed altre conseguenze delle precedenti relazioni, come, per esempio, il retrocedimento della sfera, che ha luogo quando lo strisciamento cessa dopo che il centro ha toccato il vertice della parabola, traducono fatti ben noti del giuoco del bigliardo, dove approssimativamente si verificano le condizioni supposte. *

---

* Cfr. *Jullien — Problèmes de Mécanique Rationelle.* — Paris, 1867 — tomo 2.° pag. 192 e segg.

Moto impulsivo.

§ 468. — Talvolta in un intervallo di tempo così breve da sfuggire alla misura, e con uno spostamento inapprezzabile, muta sensibilmente la velocità dei punti del mobile; tal che si compenetra l'intervallo in un istante, e si concepisce che gli atti di movimento anteriore e posteriore, col tendere del relativo istante a quello, abbiano limiti diversi, che ambedue si attribuiscono all'istante medesimo, e quindi si riferiscono alla posizione corrispondente del mobile. Così, nel linguaggio famigliare, diciamo che una palla di piombo, la quale, cadendo, incontra il suolo, *ad un tratto* si ferma. E intendiamo che la velocità d'ogni punto sia nulla a qualunque istante posteriore all'urto, e abbia un certo valore a qualunque istante anteriore, il quale, col tendere del relativo istante a quello dell'urto, ha limite diverso da zero: mentre questo limite e zero si concepiscono a piacere come velocità del punto all'istante dell'urto. Parimente si dice che una bomba *improvvisamente* scoppia; e supposto che il suo movimento prima dello scoppio sia traslatorio, s'intende che i singoli punti ad ogni istante anteriore allo scoppio hanno una certa velocità comune, e velocità generalmente diversa ad ogni istante, dopo lo scoppio, l'una e l'altra tendente, col tendere del relativo istante a quello dello scoppio, ad un proprio limite, che si assume indifferentemente all'istante medesimo per velocità del punto.

Si tratta di stabilire un procedimento per trovare uno dei due atti di movimento corrispondenti all'istante della sensibile discontinuità, dato il rimanente, e quelle altre circostanze determinatrici che converranno ai singoli casi: o anche, dati i due atti di movimento, e parte di queste circostanze, per trovare le rimanenti.

§ 469. - Perciò noi ammettiamo che in ogni intervallo comprendente l'istante considerato reggano le nostre ipotesi generali, soltanto che in un intorno inapprezzabile ai mezzi d'osservazione varii la legge delle pressioni prestabilite nei punti della superficie complessiva, in ragione di particolari condi-

zioni, come sarebbe, per esempio, la collisione del mobile con un altro.

Sia t_0 il tempo corrispondente all' istante considerato, e t'_0 un tempo anteriore abbastanza vicino. Noi ammetteremo, in primo luogo, che ad ogni istante dell'intervallo $(t_0'\ t_0)$ si verifichi il teorema *d'Alembert* (§ 413), per modo che:

$$\int k\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X_\varepsilon\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y_\varepsilon\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z_\varepsilon\right)\delta z\right\}d\tau$$
$$-\int(X_n\,\delta x+Y_n\,\delta y+Z_n\,\delta z)\,d\sigma=0;$$

dove, pel considerato intervallo di tempo, i simboli hanno il significato a suo luogo stabilito.

Quindi anche:

$$\int_{t_0'}^{t_0}dt\int k\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X_\varepsilon\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y_\varepsilon\right)\delta y+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z_\varepsilon\right)\delta z\right\}d\tau$$
$$-\int_{t_0'}^{t_0}dt\int(X_n\,\delta x+Y_n\,\delta y+Z_n\,\delta z)\,d\sigma=0.$$

Ora, stabiliamo che sensibilmente sia:

$$\int_{t_0'}^{t_0}k\,X_\varepsilon\,d\tau=\int_{t_0'}^{t_0}k\,Y_\varepsilon\,d\tau=\int_{t_0'}^{t_0}k\,Z_\varepsilon\,d\tau=0;$$

ogni punto non apparisca mutar posto, per modo che ad ogni istante dell'intervallo $(t_0'\ t_0)$ si possa attribuire lo stesso atto di movimento *virtuale*, cioè δx, δy, δz riescano, per ogni punto, costanti nell' intervallo medesimo; varii invece sensibilmente l' atto di movimento reale, per modo che, indicando con Δu, Δv, Δw le differenze delle componenti u, v, w della velocità corrispondente al posto (x, y, z) fra t_0' e t_0, abbiano valore generalmente diverso da zero; finalmente gl' integrali:

$$\int_{t_0'}^{t_0}X_n\,d\sigma,\qquad\int_{t_0'}^{t_0}Y_n\,d\sigma,\qquad\int_{t_0'}^{t_0}Z_n\,d\sigma,\tag{1}$$

ricevano parimente un valore diverso da zero, determinato dal posto (x, y, z) della superficie cui si riferiscono.

D'altra parte, abbiamo:

$$\int_{t_0'}^{t_0} dt \int k \frac{d^2 x}{dt^2} d\tau = \int k\, d\tau \int_{t_0'}^{t_0} \frac{d^2 x}{dt^2} dt = \int k \Delta u\, d\tau,$$

$$\int_{t_0'}^{t_0} dt \int X_n\, d\sigma = \int d\sigma \int_{t_0'}^{t_0} X_n\, d\sigma,$$

e le relazioni analoghe.

Concludiamo quindi che, nelle stesse ipotesi, sarà:

$$\left.\begin{array}{l} \int k (\Delta u\, \delta x + \Delta v\, \delta y + \Delta w\, \delta z)\, d\tau \\ - \int \left(\int_{t_0'}^{t_0} X_n\, dt\, \delta x + \int_{t_0'}^{t_0} Y_n\, dt\, \delta y + \int_{t_0'}^{t_0} Z_n\, dt\, \delta z \right) d\sigma = 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

per ogni atto di movimento conciliabile coi vincoli supposti.

Il vettore di cui (1) sono le componenti si chiama l' " impulso superficiale specifico „ nel punto corrispondente della superficie: analogamente l'insieme dei vettori applicati definiti da questi vettori e relativi punti, si chiamerà il sistema degli impulsi applicati ai singoli punti del mobile, o della sua superficie: dal quale sistema di vettori applicati si definirà al solito modo il risultante, che si chiamerà anche " impulso motore „ del corpo, e il risultante dei momenti rispetto ad un punto come polo.

Notiamo che l'impulso acceleratore riesce una quantità derivata la cui unità è $[l t^{-1}]$, come per la velocità, e l'impulso motore parimente una quantità derivata la cui unità è $[l t^{-1} m]$, come per la quantità di moto.

Pel precedente risultato basta oramai considerare gl'impulsi, e perciò, allo scopo d'evitare ad un tempo un'inutile complicazione di formole e moltiplicazione di simboli, adopereremo d'ora in avanti i simboli X_n, Y_n, Z_n per indicare le componenti dell'impulso superficiale specifico nel punto qualunque della superficie; mentre $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ rappresenteranno le componenti del risultante del sistema di vettori applicati, cioè dell'impulso motore, e del risultante dei loro momenti rispetto al punto assunto per origine delle coordinate.

Con ciò l'equazione (2) diventerà:

$$\left.\begin{aligned}&\int k\,(\Delta u\,\delta x+\Delta v\,\delta y+\Delta w\,\delta z)\,d\tau\\&-\int(X_n\,\delta x+Y_n\,\delta y+Z_n\,\delta z)\,d\sigma=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

E di qui, concepito, in generale, il mobile come un insieme di corpi rigidi, liberi e vincolati, ponendo:

$$\delta x=l'+q'z-r'y,\quad \delta y=m'+r'x-p'z,\quad \delta z=n'+p'y-q'x$$

per ciascun pezzo rigido, e cioè intendendo che l', m', n', p', q', r' abbiano per ciascun corpo rigido componente il sistema un valore indipendente da x, y, z, scaturisce:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\Big\{&l'(\Delta\int ku\,d\tau-\mathrm{X})+m'(\Delta\int kv\,d\tau-\mathrm{Y})+n'(\Delta\int kw\,d\tau-\mathrm{Z})\\&+p'(\Delta\int(yw-zv)\,d\tau-\mathrm{M}_x)\\&+q'(\Delta\int(zu-xw)\,d\tau-\mathrm{M}_y)\\&+r'(\Delta\int(xv-yu)\,d\tau-\mathrm{M}_z)\Big\}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

dove X, Y, Z, M_x, M_y, M_z hanno il suddetto significato pei singoli pezzi rigidi, e la sommatoria ne abbraccia l'insieme.

Sotto una qualunque di queste forme l'equazione trovata costituisce il " teorema di *d'Alembert* „ pel movimento impulsivo.

§ 470. — La precedente equazione, nei singoli casi (corpi liberi, un corpo con un punto fisso, un corpo con due punti fissi, ecc.) collo stesso procedimento per mezzo di cui si deduce dalla (1, § 413) il sistema delle equazioni del movimento corrispondente al caso considerato, fornirà un sistema di equazioni, che si dedurrà da quello colle sostituzioni con cui l' equazione in discorso si deduce dalla suddetta (1, § 413). Le quali saranno quindi altrettante relazioni fra le differenze delle quantità di moto e quantità di moto areale rispetto ad un punto dei singoli corpi all'istante della discontinuità, e i risultanti degli impulsi e loro momenti rispetto ad un punto, il cui numero, in ogni caso, insieme con quello delle relazioni fra i parametri della

velocità, che traducono i vincoli, sarà sei volte quello dei corpi componenti il sistema.

D' altra parte, sappiamo come la quantità di moto e la quantità di moto areale d' un corpo si esprimano mediante i corrispondenti parametri della velocità. Per esempio, indicando con m la grandezza della massa, con $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, le coordinate del centro di massa, con α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ i coseni di direzioni degli assi principali d' inerzia relativi ad esso all' istante considerato, presi nel debito senso, con P, Q, R i corrispondenti momenti d' inerzia, e con (u, v, w), $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ e $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r})$ la velocità del punto qualunque (x, y, z), la velocità del centro di massa, e la velocità angolare relativa ad uno stesso atto di movimento, abbiamo (§ 308, 309):

$$\int k u \, d\tau = \mathrm{m} \bar{u},$$

$$\int k (y w - z v) \, d\tau = \mathrm{m} (\bar{y} \bar{w} - \bar{z} \bar{v}) + P \mathfrak{p} \alpha_1 + Q \mathfrak{q} \alpha_2 + R \mathfrak{r} \alpha_3,$$

e le analoghe.

Ora, ogni atto di movimento è determinato dai corrispondenti valori dei parametri della velocità, e viceversa; e questi parametri sono sei per ciascun corpo. Ne viene che, supposto data in ogni caso la posizione del sistema all' istante considerato, cioè, se si vuole, il posto del centro di massa di ciascun corpo e l'orientazione della terna dei relativi assi principali d' inerzia, il suddetto sistema di relazioni permetterà in ogni caso di determinare uno dei due atti di movimento all'istante medesimo, dato l'altro, e i risultanti degli impulsi e loro momenti rispetto ad un punto: oppure questi risultanti, dati i due atti di movimento; che se questi risultanti saranno formati in modo noto coi parametri della velocità relativi ai due atti di movimento, si avrà ancora un sistema d'equazioni capaci di determinare uno dei due atti di movimento, dato l'altro, in seguito a che riuscirà noto anche il valore dei due risultanti.

§ 471. — In particolare, se all'istante considerato sarà atto di movimento virtuale del sistema quello per cui la velocità è nulla in tutti i punti d'un gruppo di corpi, e il gruppo rimanente è in atto traslatorio secondo un certo asse, oppure in atto ro-

tatorio intorno ad un certo asse istantaneo di rotazione, assumendo l'asse delle x, nel primo caso, orientato come quello dell' atto traslatorio, e nel secondo caso coincidente coll'asse istantaneo, sarà:

$$\Delta \Sigma' \int k u \, d\tau = m' \Delta \bar{u}' = \Sigma' \mathbf{X},$$

nel primo caso, e

$$\Delta \Sigma' \int k (yw - zv) \, d\tau = \Sigma' \mathbf{M}_x$$

nel secondo; dove Σ' abbraccia i corpi del secondo gruppo, e m', $\bar{u}'$ indicano la grandezza della massa del gruppo, e la componente secondo l'asse supposto della velocità del suo centro di massa. Cioè, il componente secondo il supposto asse, in un caso, dell'impulso motore del gruppo, e nell'altro del risultante dei momenti degli impulsi applicati ai punti del gruppo rispetto ad un punto dell'asse di rotazione come polo hanno per misure rispettivamente l' " aumento " della componente analoga della quantità di moto e della quantità di moto areale rispetto a quel polo (§§ 418, 419).

§ 472. — Le precedenti equazioni corrispondono alle analoghe del movimento del centro di massa e delle aree del moto ordinario. All'equazione della forza viva corrisponde, dallo stesso punto di vista, la seguente.

Introduciamo nella (3, § 469) successivamente l'ipotesi che l'atto di movimento virtuale cui si riferisce sia l'atto di movimento reale posteriore, cioè $\delta x = u_0$, $\delta y = v_0$, $\delta z = w_0$, e anteriore, cioè $\delta x = u_0'$, $\delta y = v_0'$, $\delta z = w_0'$, all' istante considerato. Abbiamo:

$$\int (X_n u_0 + Y_n v_0 + Z_n w_0) \, d\sigma$$
$$= \int k \left[(u_0 - u_0') u_0 + (v_0 - v_0') v_0 + (w_0 - w_0') w_0 \right] d\tau,$$
$$\int (X_n u_0' + Y_n v_0' + Z_n w_0') \, d\sigma$$
$$= \int k \left[(u_0 - u_0') u_0' + (v_0 - v_0') v_0' + (w_0 - w_0') w_0' \right] d\tau$$

Di qui, sommando membro a membro, e dividendo per 2:

$$\Delta \tau \int \left(X_n \frac{u_0 + u_0'}{2} + Y_n \frac{v_0 + v_0'}{2} + Z_n \frac{w + w_0'}{2} \right) d\sigma, \quad (1)$$

e posto, per ciascun pezzo rigido:

$$u_0 = l_0 + q_0 z - r_0 y, \qquad u_0' = l_0' + q_0' z - r_0' y$$

e le analoghe, anche:

$$\left.\begin{aligned} \Delta T = \Sigma \Big(& \frac{l_0 + l_0'}{2} \mathbf{X} + \frac{m_0 + m_0'}{2} \mathbf{Y} + \frac{n_0 + n_0'}{2} \mathbf{Z} \\ & + \frac{p_0 + p_0'}{2} \mathbf{M}_x + \frac{q_0 + q_0'}{2} \mathbf{M}_y + \frac{r_0 + r_0'}{2} \mathbf{M}_z \Big), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

formola che fornisce la differenza fra il limite posteriore e anteriore della forza viva del mobile, ciò che chiameremo anche la " *differenza* „ della forza viva medesima al supposto istante.

§ 473. — Gl'impulsi, o per lo meno i relativi risultanti per ogni corpo, quando ne occorre la conoscenza *a priori* più o meno completa, si debbono intendere definiti, nei singoli casi, per mezzo d'opportuni criterii, e, in ultima analisi, dell'esperienza.

Urto di due corpi. *

§ 474. — Un caso insigne di movimento impulsivo si ha nell'urto di due corpi: cioè nella variazione sensibilmente improvvisa dell'atto di movimento di due corpi prodotta dal loro reciproco incontro. Secondo i premessi principii, noi attribuiremo all'istante dell'incontro due distinti atti di movimento limite, anteriore e posteriore; e il problema principale sarà: data la posizione dei due corpi all'istante dell'incontro, e uno dei due atti di movimento limite, per esempio l'anteriore, trovar il rimanente.

Supporremo che la superficie dei due corpi sia in ogni punto dotata di pian tangente e convessa, per modo che l'incontro si traduca in un mutuo contatto delle due superficie in un certo punto. Allora, particolarmente quando inoltre la superficie sia *liscia*, si trova conveniente l'ipotesi che l'impulso motore dei due corpi abbia grandezza eguale, da determinarsi: l'orientazione della normale nel punto di contatto volta verso l'interno

* Cfr. *Poisson.* — *Traité de Mécanique.* Paris 1811 — Livre III. Chap. VII.

del corpo, e per conseguenza opposta: infine, punto d'applicazione, il quale sia il punto di contatto. Questa è la legge fondamentale del così detto " urto senza attrito ".

§ 475. — Indichiamo con Π la grandezza comune degl'impulsi motori, e immaginata in ciascun corpo la terna degli assi principali d'inerzia relativi al centro di massa, che dev'essere data, indichino, per ciascun corpo, P_i, Q_i, R_i i corrispondenti momenti d'inerzia, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ le coordinate del punto di contatto rispetto alla terna suddetta, α_i, β_i, γ_i i coseni di direzione della normale in questo punto volta verso l'interno del corpo, $\bar{\mathfrak{u}}'_i$, $\bar{\mathfrak{v}}'_i$, $\bar{\mathfrak{w}}'_i$ e $\mathfrak{p}'_i$, $\mathfrak{q}'_i$, $\mathfrak{r}'_i$ i valori anteriori delle componenti delle velocità del centro di massa e della velocità angolare — questi, tutti dati — invece, $\bar{\mathfrak{u}}_i$, $\bar{\mathfrak{v}}_i$, $\bar{\mathfrak{w}}_i$ e $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$ i valori posteriori delle componenti medesime, incogniti come Π, dove l'indice i abbia il valore 1 o 2 secondo che il simbolo si riferisce all'uno o all'altro corpo.

Si ammette che il valore anteriore della componente della velocità del punto di contatto secondo la normale nel punto medesimo abbia per ciascun corpo l'orientazione della normale volta verso l'esterno del corpo. E ciò si traduce nelle condizioni:

$$\left.\begin{array}{c} N'_i = (\bar{\mathfrak{u}}'_i + \mathfrak{q}'_i \mathfrak{c}_i - \mathfrak{r}'_i \mathfrak{b}_i)\alpha_i + (\bar{\mathfrak{v}}'_i + \mathfrak{r}'_i \mathfrak{a}_i - \mathfrak{p}'_i \mathfrak{c}_i)\beta_i + \\ (\bar{\mathfrak{w}}'_i + \mathfrak{p}'_i \mathfrak{b}_i - \mathfrak{q}'_i \mathfrak{a}_i)\gamma_i < 0, \\ (i = 1,\ 2) \end{array}\right\} \quad (1)$$

che legano i dati precedenti fra loro.

Ciò premesso, nell'ipotesi che i due corpi siano liberi, cioè non assoggettati ad alcun vincolo geometrico (§ 409), avremo (§§ 471, 470):

$$\left.\begin{array}{c} m_i(\bar{\mathfrak{u}}_i - \bar{\mathfrak{u}}'_i) = \Pi\alpha_i, \quad m_i(\bar{\mathfrak{v}}_i - \bar{\mathfrak{v}}'_i) = \Pi\beta_i, \quad m_i(\bar{\mathfrak{w}}_i - \bar{\mathfrak{w}}'_i) = \Pi\gamma_i, \\ P_i(\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}'_i) = \Pi(\mathfrak{b}_i\gamma_i - \mathfrak{c}_i\beta_i), \\ Q_i(\mathfrak{q}_i - \mathfrak{q}'_i) = \Pi(\mathfrak{c}_i\alpha_i - \mathfrak{a}_i\gamma_i), \\ R_i(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}'_i) = \Pi(\mathfrak{a}_i\beta_i - \mathfrak{b}_i\alpha_i), \\ (i = 1,\ 2); \end{array}\right\} \quad (2)$$

in tutto dodici equazioni di primo grado.

Così, occorre un'altra equazione per formare il numero delle incognite. D'altra parte, corpi di diversa natura fisica, *caeteris paribus,* pur rispettando la premessa legge fondamentale, si comportano diversamente; per esempio, due palle di piombo, dopo l'urto, si mantengono unite, mentre due palle d'avorio rimbalzano. E per conseguenza, occorre, per determinare completamente il movimento, qualche ipotesi di più, relativa alla natura speciale che i corpi si suppongono avere, la quale fissi in certo qual modo la natura medesima.

Per orientarci in questa ricerca, formiamo l'espressione della differenza ΔT della forza viva del sistema dei due corpi all'istante dell'urto (§ 471). Introducendo nella (2, § 471) le ipotesi particolari del precedente caso, e valendoci delle precedenti equazioni (2), donde segue:

$$\overline{\mathfrak{u}}_i + \overline{\mathfrak{u}}'_i = 2\overline{\mathfrak{u}}' + \Pi \frac{\alpha_i}{m_i}, \qquad \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}'_i = 2\mathfrak{p}'_i + \Pi \frac{\mathfrak{b}_i\gamma_i - \mathfrak{c}_i\beta_i}{P_i}$$

e le analoghe, troviamo immediatamente:

$$\Delta T = -\left(2\frac{\varpi}{\Pi} - 1\right)\mathrm{T}; \tag{3}$$

dove, posto:

$$\Sigma\left(\frac{1}{m_i} + \frac{(\mathfrak{b}_i\gamma_i - \mathfrak{c}_i\beta_i)^2}{P_i} + \frac{(\mathfrak{c}_i\alpha_i - \mathfrak{a}_i\gamma_i)^2}{Q_i} + \frac{(\mathfrak{a}_i\beta_i - \mathfrak{b}_i\alpha_i)^2}{R_i}\right) = \frac{1}{M},$$

è:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2M}\Pi^2, \qquad \varpi = -M(N'_1 + N'_2). \tag{4}$$

T, con ciò, come senz'altro scaturisce dalle (2), tenendo presente l'espressione generale del § 281, rappresenta la grandezza della forza viva del sistema dei due corpi, nell'ipotesi che la velocità dei singoli punti abbia per componenti le differenze fra il valore posteriore e anteriore delle componenti analoghe della velocità nel punto medesimo all'istante dell'urto: ciò che chiameremo la " forza viva corrispondente alle differenze delle velocità dei singoli punti ".

E ϖ, come parimente scaturisce dalle stesse equazioni (2), moltiplicando le prime tre di ciascuna sestupla rispettivamente

per α_i, β_i, γ_i, e le rimanenti per $\frac{\mathfrak{b}_i \gamma_i - \mathfrak{c}_i \beta_i}{P_i}$, e i due analoghi binomii, poi sommandole tutte membro a membro, tenuto calcolo dell'espressione di N'_i fornita dalla (1), è il valore di Π nell'ipotesi che sia:

$$N_1 + N_2 = 0;$$

dove N_i ha per la velocità posteriore lo stesso significato che N'_i per l'anteriore. La qual relazione esprime semplicemente che la componente della velocità posteriore del punto di contatto secondo la normale nel punto medesimo volta in un senso determinato, eguale pei due corpi, ha lo stesso valore, a qualunque dei due corpi si concepisca appartenere il punto di contatto; condizione necessaria perchè i due corpi, dopo l'urto, si mantengano a contatto in quel punto.

Quindi, in questa ipotesi, l'urto implica una *perdita* di forza viva, di grandezza eguale alla forza viva del sistema corrispondente alle differenze delle velocità dei singoli punti. E reciprocamente, supposta tale la differenza della forza viva del sistema dei due corpi, si ha:

$$\Pi = \varpi.$$

Invece, supposto che la differenza della forza viva del sistema sia nulla, cioè eguali i valori della forza viva del sistema anteriore e posteriore all'urto, si ha per (3):

$$\Pi = 2\varpi;$$

cioè la grandezza dell'impulso risulta doppia che nel caso precedente.

Secondo l'esperienza, ΔT in nessun caso è positivo. Quindi potremo porre, per (3):

$$2\frac{\varpi}{\Pi} - 1 = 1 - s,$$

dove s riceve a seconda del caso, un valore compreso fra zero e 1. E per ogni valore di s, l'urto implicherà una perdita di forza viva rappresentata dalla frazione $1 - s$ di T.

Posto poi:

$$1 - \frac{s}{2} = \frac{1}{1+e},$$

si avrà, per ogni caso:

$$e = \frac{s}{2-s}, \qquad \Pi = (1+e)\,\varpi,$$

dove il valore di e varia, come quello di s, tra zero e l'unità.

Ora, le equazioni (2), dove si faccia $\Pi = (1+e)\,\varpi$ con $e > 0$, si possono concepire formate sommando membro a membro le equazioni di due sistemi della stessa forma, nell'uno dei quali sia $\Pi = \varpi$, i valori anteriori siano i dati, e i posteriori quelli che dal sistema stesso risultano determinati, mentre nell'altro è $\Pi = e\,\varpi$, i valori anteriori sono questi ultimi, e i valori posteriori quelli che il sistema determina, e convengono al caso considerato. E per conseguenza avviene come se la produzione di questi valori avesse per condizione due *fasi* successive, nella prima delle quali la grandezza dell'impulso motore fosse ϖ, tale da riuscire le (2) soddisfatte dai corrispondenti valori posteriori, mentre nella seconda fosse $e\varpi$, e questi ultimi valori fungessero da anteriori.

D'altra parte, emerge da (2), per (1) e la seconda delle (4), che N_1, N_2 calcolate coll'ipotesi $\Pi = (1+e)\,\varpi$ sono positive; per modo che la componente della velocità posteriore del punto di contatto secondo la normale, ha per ciascun corpo l'orientazione della normale interna, opposta a quella della componente stessa della velocità anteriore. In altri termini, mentre i valori anteriori, corrispondono ad un mutuo avvicinamento dei punti che si confondono nel contatto, i valori posteriori corrispondono ad un mutuo discostamento dei punti medesimi.

Questo duplice fenomeno s'accompagna col fatto sperimentale che e è, per ogni coppia di corpi di determinata natura fisica, sensibilmente costante; ed uno sforzo che obblighi a comprimersi i corpi l'un coll'altro, vi produce una deformazione, che scema, al diminuirlo e toglierlo, tanto più quanto più e, diverso da zero, si approssima all'unità, e perdura se $e = 0$.

Supposti i due corpi della stessa natura fisica, se è $e = 1$, si dicono " perfettamente elastici "; se è invece $e = 0$, " anelastici "; che se e ha un valore qualunque compreso fra zero e l'unità, si dicono " imperfettamente elastici ": mentre e, in ogni caso, si chiama il " coefficiente di restituzione " * (da altri " coefficiente d'elasticità all'urto "): termine di cui le riflessioni precedenti manifestano la ragione.

§ 476. — Osserviamo che, per le (2) del paragrafo precedente, la differenza della velocità del centro di massa d' uno dei due corpi non potrà esser nulla se non è nullo l'impulso motore; e quindi nulla la differenza analoga per l'altro corpo, e la differenza della velocità angolare per ambedue. Invece, anche con un impulso non nullo, sarà nulla la differenza della velocità angolare per un corpo quando sia:

$$\frac{\mathfrak{a}_i}{\alpha_i} = \frac{\mathfrak{b}_i}{\beta_i} = \frac{\mathfrak{c}_i}{\gamma_i};$$

cioè il centro di massa sulla normale alla superficie nel punto di contatto. In questo caso l'urto si dice " centrale ".

§ 477. — L'impulso motore e il risultante dei momenti degli impulsi rispetto ad un punto qualunque, pel sistema dei due corpi sono nulli; per modo che saranno eguali i valori anteriore e posteriore della quantità di moto del sistema, ossia della velocità del suo centro di massa, e della quantità di moto areale rispetto ad un punto qualunque.

§ 478. — Sia il rapporto della massa d'uno dei due corpi a quella dell'altro estremamente grande, e nulla la velocità anteriore d'ogni suo punto: l'atto di movimento anteriore dell'altro, per fissare le idee, traslatorio, parallelo alla normale nel punto di contatto: infine, l'urto dei due corpi, centrale (§ 476). La quantità di moto del sistema dei due corpi posteriore all'urto dev'essere eguale a quella anteriore del corpo più piccolo (§ 477). Quindi, nell'ipotesi dell'anelasticità, essendo la grandezza di questa quantità di moto rappresentata da $(m_1 + m_2)\, u$, dove u rappresenta la grandezza della comune velocità posteriore dei due corpi, dovrà

* *Thomson* e *Tait* — op. cit. — § 390.

il rapporto di questa all'anteriore del corpo più piccolo essere estremamente piccolo; cioè dell' ordine del numero inverso del suddetto rapporto delle masse. E perciò, se la posizione dell'insieme dei due corpi relativa al supposto contatto è d'equilibrio stabile, il corpo più grande si manterrà sensibilmente in quiete, e il più piccolo si arresterà a contatto di esso. Nell'ipotesi invece dell'elasticità perfetta dovrà inoltre la forza viva posteriore del sistema aver la grandezza dell'anteriore del corpo più piccolo: donde viene escluso che possa essere grandissimo il rapporto della velocità posteriore alla velocità anteriore di questo corpo; e, per l'eguaglianza dei valori anteriore e posteriore della quantità di moto del sistema, bisogna che sia estremamente piccolo il rapporto della velocità posteriore del corpo più grande all'anteriore del corpo più piccolo. Allora anche il rapporto della sua forza viva posteriore a quella del corpo più piccolo sarà un numero piccolissimo; per modo che la forza viva posteriore del sistema si ridurrà sensibilmente a quella del corpo più piccolo. E per conseguenza la forza viva posteriore di questo corpo sarà la stessa come l'anteriore, e d'egual grandezza la velocità posteriore e anteriore del corpo medesimo. Sappiamo poi che il senso sarà l'opposto (§ 475). Quindi, in conclusione, l'atto di movimento posteriore del corpo più piccolo sarà eguale ed opposto all'anteriore, e il corpo *rimbalzerà*; mentre il più grande, come nel caso precedente, ove la supposta posizione sia d'equilibrio stabile, si manterrà sensibilmente in quiete.

§ 479. — Tali ipotesi si applicano, per esempio, al caso del Globo Terreste, e d'un grave liberamente cadente, che venga a battere contro il suolo. E l'esperienza constata un accordo abbastanza soddisfacente tra il fatto e queste, come anche altre, conseguenza della teoria: almeno per corpi di certa natura fisica, e fra certi limiti delle circostanze determinatrici del fenomeno, ai quali sembrano particolarmente convenire le ipotesi che abbiamo posto per fondamento. Al qual proposito possiamo fare qualche riflessione analoga a quelle che si fecero per la resistenza dei mezzi e per l'attrito (§ 462); e osservare che il metodo più naturale per lo studio dell'urto dovrebbe fondarsi sulla deformazione di due corpi a mutuo contatto, determinata da

date forze e atti di movimento all'istante a cui il contatto comincia. Oltre di che la costante produzione di calore, commisurata all'energia che scompare, prova che il movimento propriamente detto non costituisce che un aspetto del fenomeno reale, per avventura troppo limitato perchè un'unica legge possa, come in altri ordini di movimento, abbracciare tutti i casi (cfr. § 462).

Teorema di Hamilton.

§ 480. — L'equazione di *d'Alembert* e *Lagrange*, traducente il teorema di *d' Alembert* (§ 412), si può porre (aggiungendo, se occorre, le opportune restrizioni) sotto diverse forme, che esprimono notevoli proposizioni, e, da una parte, rivelano nuovi aspetti di quel teorema, dall'altra, servono utilmente al calcolo del movimento.

§ 481. — In primo luogo, intendendo che t', t'' dinotino due valori della misura t del tempo, scelti ambedue a piacere nell'intervallo considerato, e δx, δy, δz funzioni finite e continue di t nell'intervallo medesimo, l'equazione in discorso equivale a:

$$\left.\begin{aligned}\int_{t'}^{t''} dt \Bigg[\int k \Big\{ \Big(\frac{d^2 x}{dt^2} - X_\varepsilon \Big) \delta x + \Big(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y_\varepsilon \Big) \delta y + \Big(\frac{d^2 z}{dt^2} - Z_\varepsilon \Big) \delta z \Big\} d\tau \\ - \int \Big(X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z \Big) d\sigma \Bigg] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

La quale infatti ne scaturisce immediatamente; mentre da questa equazione, indicando con t il valore corrispondente ad un istante qualsivoglia dell'intervallo, e per un momento, per brevità di scrittura, con I la differenza dei due integrali estesi a τ e a σ, segue:

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} I\, dt}{\Delta t} = 0,$$

che altro non è che l'equazione primitiva.

§ 482. — Poniamo:

$$\int k(X_\varepsilon\,\delta x + Y_\varepsilon\,\delta y + Z_\varepsilon\,\delta z)\,d\tau + \int (X_n\,\delta x + Y_n\,\delta y + Z_n\,\delta z)\,d\sigma = \Pi,$$

per modo che Π rappresenti la misura della potenza virtuale corrispondente ad un atto di movimento virtuale qualunque al tempo t del sistema delle forze limite esterne rispetto a ciascuna parte rigida del mobile, applicato ai punti del mobile stesso, e delle pressioni prestabilite applicato ai punti della sua superficie; oltre di che, al solito (§ 269):

$$\frac{1}{2}\int k\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)d\tau = T.$$

Si ha:

$$\int_{t'}^{t''} dt \int k\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x\,d\tau = \int k\,d\tau \int_{t'}^{t''} \frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x\,dt, \qquad (§\ 221)$$

$$\int_{t'}^{t''} \frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x\,dt = \left|\frac{dx}{dt}\,\delta x\right|_{t'}^{t''} - \frac{1}{2}\int_{t'}^{t''} \delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt,$$

$$\int k\,d\tau \int_{t'}^{t''} \delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_{t'}^{t''} dt \int k\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d\tau, \qquad (§\ 221)$$

$$\int k\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d\tau = \delta \int k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d\tau. \qquad (§\ 220)$$

Quindi a (1, § 481) si può dare la forma:

$$\int_{t'}^{t''} (\delta T + \Pi)\,dt = \left|\int k\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right)d\tau\right|_{t'}^{t''}, \qquad (1)$$

che costituisce il "teorema di *Hamilton*", nella sua forma più generale.

Supponendo ai limiti dell'integrazione $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, si ha di qui:

$$\int_{t'}^{t''} (\delta T + \Pi)\,dt = 0, \qquad (2)$$

espressione del teorema conforme a questa ipotesi, che è la più comunemente adoperata.

§ 483. — È notevole il caso che sia:

$$\Pi = \delta W,$$

per modo che W potrà rappresentare il potenziale del sistema di forze applicato ai punti del mobile corrispondente a $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon, Z_\varepsilon)$; ma più generalmente s'intenderà una funzione della posizione del mobile, ed anche del tempo esplicito (" potenziale dipendente dal tempo esplicito "), mentre a questo non si estenderà in nessun caso la variazione δ. Vale a dire, se la posizione, conformemente ai legami, è individuata dalle n variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, sarà W, nel caso più generale, una funzione di $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ e t: ma, in ogni caso:

$$\delta W = \Sigma_i \frac{dW}{d\xi_i} \delta \xi_i. \tag{1}$$

Allora, le due precedenti equazioni diventano:

$$\delta \int_t^{t'} (T + \Pi)\, dt = \left| \int k \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) d\tau, \right|_t^{t'} \tag{2}$$

$$\delta \int_t^{t'} (T + \Pi)\, dt = 0. \tag{3}$$

E con ciò la relazione stabilita dal teorema di *d'Alembert* fra gli elementi del movimento effettivo e d'ogni possibile movimento virtuale si traduce nelle suddette ipotesi nella proposizione che " il valore di:

$$\int_t^{t'} (T + \Pi)\, dt$$

pel movimento effettivo soddisfa alla condizione caratteristica * necessaria per essere minimo o massimo fra i valori corrispon-

* Per brevità di discorso, chiamiamo così la condizione che il differenziale primo, o la variazione prima, abbia valor zero.

denti a tutti i movimenti virtuali pei quali la posizione del mobile è la stessa come pel movimento effettivo al principio e alla fine del relativo intervallo di tempo $(t' t'')$, limitato da due istanti quali si vogliano dell'intervallo a cui il movimento considerato si riferisce „.

Teorema della minima azione.

§ 484. — Supponiamo esistente il potenziale, W, indipendente dal tempo, e indipendenti dal tempo i legami, per modo che si verifichi il teorema della conservazione dell'energia (§ 285), cioè sia:

$$T - W = T_0 - W_0. \tag{1}$$

Intendiamo che il secondo membro si riferisca al valore t' o t'' di t. Poste le condizioni (§ 482):

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0, \tag{2}$$

ne verrà:

$$\delta W_0 = 0, \qquad \delta T - \delta W = \delta T_0. \tag{3}$$

Stabiliamo altresì che sia, per lo stesso valore di t, nulla la variazione della forza viva del mobile; cioè:

$$\delta T_0 = 0. \tag{4}$$

Allora, per la seconda delle (3):

$$\delta T = \delta W, \tag{5}$$

la quale, per la prima delle stesse (3), comprende (4).

E per (3, § 483):

$$\delta \int_{t'}^{t''} T dt = 0, \tag{6}$$

o anche:

$$\delta \frac{\int_{t'}^{t''} T dt}{t'' - t'} = 0. \tag{6'}$$

colle quali si deve, oltre (2), *congiungere* (5).

Questo è il così detto " teorema (o principio) della minima azione „; secondo il quale " supposto verificato il teorema della conservazione dell'energia, e fissato, in primo luogo, il potenziale, il movimento effettivo conferisce alla forza viva media del sistema in un intervallo terminato a due istanti quali si vogliano la proprietà di soddisfare alla condizione caratteristica necessaria per essere minima o massima, fra tutti i movimenti virtuali, che corrispondono allo stesso potenziale, e hanno comune con esso la posizione a quei due istanti, e la forza viva ad uno di essi „.

Osservazione. — Notiamo, per schiarimento, che fissata la funzione W, e per un istante il valore T_0 di T, e la posizione del mobile, donde il corrispondente valore W_0 di W, la (1) fornisce, per ogni *posizione* prestabilita, il corrispondente valore di T. Quindi, attribuita *a priori* una posizione del mobile ad ogni valore di t d'un intervallo che comprende il suddetto istante, qual si voglia, purchè la successione corrispondente riesca continua, e quindi T funzione continua di t, riuscirà determinato, qualunque sia questa successione, il relativo valore della forza viva media. Ora, la precedente proposizione afferma che, come conseguenza del teorema di *d'Alembert*, presi due istanti a piacere, e fissata la posizione agli istanti medesimi, e all'un d'essi la forza viva, il valore della forza viva media, che compete al movimento effettivo, soddisfa alla condizione caratteristica necessaria per essere minimo e massimo, fra i valori calcolati in tal modo per tutte le successioni di posizioni conciliabili coi vincoli supposti.

§ 485. — All'equazione (6) del § precedente si può dare un'altra forma. Indicando con v e s le misure della velocità del punto qualunque del mobile al tempo t, e dell'arco della sua trajettoria terminato al posto corrispondente nello stesso tempo, si ha:

$$ds = \mathrm{v}\, dt,$$

$$2\, T\, dt = \int_{\tau} k\, \mathrm{v}^2\, dt\, d\tau = \int_{\tau} k\, \mathrm{v}\, ds\, d\tau\,;$$

per modo che a (6, § 484) si può sostituire:

$$\delta \int_{t'}^{t''} \int_{\tau} k\, \mathrm{v}\, ds\, d\tau. \qquad (1)$$

Ora, *Maupertuis* enunciò per la prima volta, *per un sistema di punti materiali,* la proposizione:

$$\delta \int \Sigma m \mathrm{v}\, ds = 0,$$

e l'interpretò come una condizione di minimo dell'integrale, al quale attribuì la qualifica di " azione delle forze nel supposto intervallo di tempo ". Donde i termini tuttora adoperati.

§ 486. — Applicata ad un punto materiale (§ 328), la suddetta equazione (1) si riduce a:

$$\delta \int_{s'}^{s''} \mathrm{v}\, ds = 0,$$

dove s', s'' sono i valori di s per due punti qualunque della trajettoria. E per conseguenza, " se è v costante:

$$\delta \int_{s'}^{s''} ds = 0;$$

cioè la trajettoria, se il punto è libero, sarà rettilinea, e se è obbligato a serbarsi sopra una superficie fissa, un arco di *geodetica* della superficie ".

§ 487. — Si chiama, in generale, " movimento per inerzia subordinato a certi vincoli, " quello che è determinato da quei vincoli, nell'ipotesi che siano nulle le forze esterne limite e le pressioni prestabilite, ossia costante, o nullo il relativo potenziale.

Pel teorema della conservazione dell'energia, " la forza viva in un movimento per inerzia subordinato a vincoli quali si vogliano indipendenti dal tempo è costante ": e per conseguenza, se il mobile si riduce ad un punto materiale, costante la velocità.

Si conclude che " la trajettoria del movimento per inerzia d'un punto materiale è una retta, se il punto è libero, e s'è obbligato a mantenersi sopra una superficie fissa, una geodetica di questa ".

Equazioni di Lagrange in coordinate generali.

§ 488. — Sia la posizione d'un sistema vincolato individuata dai valori di un certo numero di parametri o variabili, che potremo chiamare le " coordinate del sistema „.

Indicandole con $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, le coordinate ordinarie x, y, z d'ogni punto del sistema risulteranno funzioni di esse. Quindi, in primo luogo:

$$\frac{dx}{dt} = \Sigma_i \frac{dx}{d\xi_i} \frac{d\xi_i}{dt}, \qquad \delta x = \Sigma_i \frac{dx}{d\xi_i} \delta\xi_i, \tag{1}$$

dove la sommatoria si estende a tutte le ξ; e formole analoghe per y e z.

Per la prima formola, la grandezza della forza viva T si riduce una funzione quadratica delle $\frac{d\xi_i}{dt}$, i cui coefficienti non dipendono che dalle ξ. Quindi posto per brevità di scrittura:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \xi'_i, \tag{2}$$

abbiamo:

$$\delta T = \Sigma_i \left(\frac{dT}{d\xi_i} \delta\xi_i + \frac{dT}{d\xi'_i} \delta\xi'_i \right).*$$

Le X_ε, Y_ε, Z_ε e X_n, Y_n, Z_n risulteranno poi anche certe funzioni delle t, ξ_i, $\frac{d\xi_i}{dt}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$: e perciò, indicando con Ξ_i un'opportuna funzione delle stesse variabili, avremo:

$$\Pi = \Sigma_i \Xi_i \delta\xi_i \tag{3}$$

Introduciamo questi risultati nella formola (2, § 482). Otteniamo immediatamente:

$$\int_{t'}^{t''} dt \, \Sigma_i \left(\frac{dT}{d\xi'_i} \delta\xi'_i + \left(\frac{dT}{d\xi_i} + \Xi_i \right) \delta\xi_i \right) = 0,$$

* Rilevisi che, conformemente a questa relazione, le derivate rispetto a ξ_i e ξ'_i sono prese trattando queste $2n$ variabili come affatto indipendenti.

cui bisogna aggiungere la condizione che pei limiti dell'integrazione le $\delta\xi_i$ sono tutte nulle.

Tenendo calcolo di questa condizione, si ha:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{dT}{d\xi'_i}\delta\xi'_i\, dt = -\int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\xi'_i}\right)\delta\xi_i\, dt.$$

Quindi:

$$\int_{t'}^{t''} dt\, \Sigma_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\xi'_i}\right) - \frac{dT}{d\xi_i} - \Xi_i\right)\delta\xi_i = 0.$$

E poichè l'intervallo $(t'\,t'')$ comprendente t si può prendere piccolo fin che si vuole, di qui (§ 66):

$$\Sigma_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\xi'_i}\right) - \frac{dT}{d\xi_i} - \Xi_i\right)\delta\xi_i = 0, \tag{4}$$

dove il primo membro si riferisce al tempo t.

Supponiamo infine che le $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ siano fra loro indipendenti, per modo da poter attribuire a ciascuna un valore diverso da zero e simultaneamente il valor zero alle altre. In tal caso:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\xi'_i}\right) - \frac{dT}{d\xi_i} = \Xi_i, \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{5}$$

Queste equazioni, che riescono tante quante sono le ξ_i, permetteranno, nelle debite ipotesi, di determinarle in funzione di t, con che sarà individuata ad ogni istante la posizione del sistema, e noto il suo movimento. Esse si chiamano le " equazioni del movimento di *Lagrange* in coordinate generali ". *

Se è $\Pi = \delta W$, ciò vuol dire che, per (3, § 488), sarà $\Xi_i = \frac{dW}{d\xi_i}$, e si scriverà meglio così:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\xi'_i}\right) = \frac{d(T+W)}{d\xi_i}.$$

* Anche " seconda forma ": chiamandosi " prima forma " le equazioni del § 452.

In ogni caso, la quantità misurata da Ξ_i si chiama talvolta la " forza del sistema corrispondente alla coordinata ξ_i "; e analogamente la quantità di cui ξ'_i è la misura, la " velocità del sistema corrispondente alla coordinata ξ_i " medesima.

§ 489. — Posto:

$$m_{ij} = \int k \left(\frac{dx}{d\xi_i} \frac{dx}{d\xi_j} + \frac{dy}{d\xi_i} \frac{dy}{d\xi_j} + \frac{dz}{d\xi_i} \frac{dz}{d\xi_j} \right) d\tau,$$

per modo che:

$$m_{ij} = m_{ij},$$

si troverà immediatamente:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \, m_{ij} \, \xi'_i \, \xi'_j, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

E di qui:

$$\frac{dT}{d\xi'_i} = \Sigma_j \, m_{ij} \, \xi'_j. \tag{2}$$

§ 490. — Ora scriviamo anche l'equazione fondamentale del moto impulsivo (§ 469) sotto la forma abbreviata:

$$\int k (\Delta u \, \delta x + \Delta v \, \delta y + \Delta w \, \delta z) \, d\tau - P = 0.$$

Introducendo in questa equazione le (1, § 488), oltre di che ponendo, conformemente alla seconda:

$$P = \Sigma_i \, I_i \, \delta \xi_i,$$

si otterrà subito:

$$\Sigma_i (\Sigma_j \, m_{ij} \, \Delta \xi'_j - I_i) \, \delta \xi_i = 0;$$

e posto:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \, m_{ij} \, \Delta \xi'_i \, \Delta \xi'_j,$$

per modo che, per (1) del § precedente, T sia la grandezza della forza viva corrispondente alle differenze delle velocità dei singoli punti (§ 475), sott'altra forma:

$$\Sigma_i \left(\frac{dT}{d \Delta \xi'_i} - I_i \right) \delta \xi_i = 0.$$

Ne viene, nell'ipotesi che le coordinate $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ siano fra loro indipendenti:

$$\frac{dT}{d\Delta\xi'_i} = \mathrm{I}_i;$$

altrettante equazioni, che si dicono le " equazioni del moto impulsivo in coordinate generali ".

Le quantità di cui $\Delta\xi'_i$ e I_i sono le misure si dicono, con termini analoghi a quelli del § 488, la " differenza della velocità del sistema corrispondente alla coordinata ξ_i ", e " l'impulso del sistema corrispondente alla coordinata ξ_i " medesima.

§ 491. — Da ciò emerge anche il significato meccanico dei coefficienti differenziali $\frac{dT}{d\xi'_i}$, che figurano nelle (4, 5, § 488). E cioè essi rappresentano la misura degli impulsi del sistema corrispondenti alle singole coordinate ξ_i, all'istante considerato, capaci di determinare nel sistema, a quell'istante, con un atto di movimento anteriore nullo, un atto di movimento posteriore, per cui le velocità del sistema corrispondenti alle singole coordinate ξ_i hanno per misura i supposti valori ξ'_i.

§ 492. — L'ipotesi che in un intervallo di tempo il sistema sia in equilibrio si traduce, se si vuole, in quella che, nello stesso intervallo, sia $T = 0$. E con questa ipotesi le (5, § 488) si riducono a:

$$\Xi_i = 0,$$

" equazioni dell'equilibrio in coordinate generali "; che forniranno i sistemi di valori delle coordinate $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ relativi alle posizioni d'equilibrio.

§ 493. — Riprendiamo la (4, § 488), che scriviamo per un momento sotto la forma:

$$\Sigma \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\xi'_i} \right) - \frac{dT}{d\xi_i} \right) = \Sigma_i \, \Xi_i \, \delta\xi_i = \Pi,$$

e supponiamo che le $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ siano funzioni di m variabili indipendenti, conformemente alla qual circostanza sia:

$$\delta\xi_j = \Sigma_j \, \Lambda_{ij} \, \lambda_j, \qquad \Pi = \Sigma_i \, \Xi_i \, d\xi_i = \Sigma'_j \, \Pi_j \, \lambda_j$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ dinotano m parametri indipendenti, suscettibili di valori arbitrarii. Sostituendo, e raccogliendo le singole λ, abbiamo:

$$\Sigma_j \lambda_j \left(\Sigma_i \Lambda_{ij} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\xi'_i} \right) - \frac{dT}{d\xi_i} \right) - \Pi_j \right) = 0;$$

donde, col solito principio:

$$\Sigma_i \Lambda_{ij} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\xi'_i} \right) - \frac{dT}{d\xi_i} \right) = \Pi_j, \quad (j = 1, 2, \ldots m) \qquad (1)$$

che sarà un'altra forma delle equazioni del movimento.

Applicazione ad un corpo rigido.

§ 494. — La posizione d'un corpo rigido *libero* si determina nel modo più generale con quella d'un suo punto qualsivoglia, e l'orientazione d'una terna d'assi coordinati qualsivoglia ad esso invariabilmente congiunta, avente questo punto per origine; quindi, indicando, al solito, con α, β, γ e $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ le coordinate del punto in discorso e i coseni di direzione dei singoli assi della terna rispetto ad una terna d'assi fissi, mediante i valori di queste dodici variabili.

Ora, le ultime nove sono funzioni di tre variabili indipendenti (§ 24); ciò che riduce a sei il numero delle *coordinate del corpo* fra loro indipendenti.

D'altra parte, sarà:

$$\delta x = \lambda + \chi z - \rho y, \qquad \delta y = \mu + \rho x - \pi z, \qquad \delta z = \nu + \pi y - \chi x,$$

dove $\lambda, \mu, \nu, \pi, \chi, \rho$ sono arbitrarie; conformemente alle quali relazioni è (cfr. § 158):

$$\left. \begin{matrix} \delta\alpha = \lambda + \chi\gamma - \rho\beta, & & \delta\alpha_i = \chi\gamma_i - \rho\beta_i \\ (\alpha, \beta, \gamma) & (\lambda, \mu, \nu) & (\pi, \chi, \rho) \end{matrix} \right\};$$

oltre di che (§ 303):

$$\Pi = \mathbf{X}\lambda + \mathbf{Y}\mu + \mathbf{Z}\nu + \mathbf{M}_x\pi + \mathbf{M}_y\chi + \mathbf{M}_z\rho.$$

Ciò posto, abbiamo quanto occorre per applicare senz'altro le (1, § 493) al caso in discorso; e trovare così la forma più generale delle equazioni del movimento d'un corpo rigido libero.

Per porle sotto la più conveniente espressione, giova concepire T sotto l'espressione generale del § 281; e per conseguenza come funzione delle ventiquattro variabili $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ composta mediante le $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, conformemente alle relazioni (§ 159):

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{l} = \alpha_1 \alpha' + \beta_1 \beta' + \gamma_1 \gamma', \qquad \mathfrak{p} = \alpha_3 \alpha'_2 + \beta_3 \beta'_2 + \gamma_3 \gamma'_2 \\ (\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \qquad (1, 2, 3)\end{array}\right\} \quad (1)$$

Si ottiene così il sistema di sei equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{dT}{d\mathfrak{l}} + \alpha_2 \frac{dT}{d\mathfrak{m}} + \alpha_3 \frac{dT}{d\mathfrak{n}}\right) = \mathbf{X}, \\ \frac{d}{dt}\left(\beta_1 \frac{dT}{d\mathfrak{l}} + \beta_2 \frac{dT}{d\mathfrak{m}} + \beta_3 \frac{dT}{d\mathfrak{n}}\right) = \mathbf{Y}, \\ \frac{d}{dt}\left(\gamma_1 \frac{dT}{d\mathfrak{l}} + \gamma_2 \frac{dT}{d\mathfrak{m}} + \gamma_3 \frac{dT}{d\mathfrak{n}}\right) = \mathbf{Z},\end{array}\right\} \quad (2)_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\left\{\begin{array}{l}(\gamma_1 \beta - \beta_1 \gamma) \frac{dT}{d\mathfrak{l}} + (\gamma_2 \beta - \beta_2 \gamma) \frac{dT}{d\mathfrak{m}} + (\gamma_3 \beta - \beta_3 \gamma) \frac{dT}{d\mathfrak{n}} \\ + \alpha_1 \frac{dT}{d\mathfrak{p}} + \alpha_2 \frac{dT}{d\mathfrak{q}} + \alpha_3 \frac{dT}{d\mathfrak{r}}\end{array}\right\} = \mathbf{M}_x, \\ \frac{d}{dt}\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1 \gamma - \gamma_1 \alpha) \frac{dT}{d\mathfrak{l}} + (\alpha_2 \gamma - \gamma_2 \alpha) \frac{dT}{d\mathfrak{m}} + (\alpha_3 \gamma - \gamma_3 \alpha) \frac{dT}{d\mathfrak{n}} \\ + \beta_1 \frac{dT}{d\mathfrak{p}} + \beta_2 \frac{dT}{d\mathfrak{q}} + \beta_3 \frac{dT}{d\mathfrak{r}}\end{array}\right\} = \mathbf{M}_y, \\ \frac{d}{dt}\left\{\begin{array}{l}(\beta_1 \alpha - \alpha_1 \beta) \frac{dT}{d\mathfrak{l}} + (\beta_2 \alpha - \alpha_2 \beta) \frac{dT}{d\mathfrak{m}} + (\beta_3 \alpha - \alpha_3 \beta) \frac{dT}{d\mathfrak{n}} \\ + \gamma_1 \frac{dT}{d\mathfrak{p}} + \gamma_2 \frac{dT}{d\mathfrak{q}} + \gamma_3 \frac{dT}{d\mathfrak{r}}\end{array}\right\} = \mathbf{M}_z;\end{array}\right\} \quad (2)_2$$

delle quali le prime tre si hanno immediatamente, e le rimanenti, riunendo nel primo membro i termini dove figurano le singole derivate di T rispetto a $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, ed eseguendo poi ovvie trasformazioni.

Questa è una prima forma delle equazioni cercate; un'altra se ne ricava moltiplicando le singole equazioni della prima e della seconda terna per α_i, β_i, γ_i rispettivamente, e con ciascun valore di i sommando membro a membro. Troviamo così, con un procedimento analogo a quello del § 350, per dedurre le $(2)''$ dalle $(2)'$, e valendosi delle precedenti relazioni (1):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\mathfrak{l}}\right) &= \mathfrak{r}\frac{dT}{d\mathfrak{m}} - \mathfrak{q}\frac{dT}{d\mathfrak{n}} + \mathfrak{X},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\mathfrak{m}}\right) &= \mathfrak{p}\frac{dT}{d\mathfrak{n}} - \mathfrak{r}\frac{dT}{d\mathfrak{l}} + \mathfrak{Y},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\mathfrak{n}}\right) &= \mathfrak{q}\frac{dT}{d\mathfrak{l}} - \mathfrak{p}\frac{dT}{d\mathfrak{m}} + \mathfrak{Z},
\end{aligned}\right\}\qquad (3)_1$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\mathfrak{p}}\right) &= \mathfrak{n}\frac{dT}{d\mathfrak{m}} - \mathfrak{m}\frac{dT}{d\mathfrak{n}} + \mathfrak{r}\frac{dT}{d\mathfrak{q}} - \mathfrak{q}\frac{dT}{d\mathfrak{r}} + \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\mathfrak{q}}\right) &= \mathfrak{l}\frac{dT}{d\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}\frac{dT}{d\mathfrak{l}} + \mathfrak{p}\frac{dT}{d\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}\frac{dT}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{M}_{\mathfrak{y}},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\mathfrak{r}}\right) &= \mathfrak{m}\frac{dT}{d\mathfrak{l}} - \mathfrak{l}\frac{dT}{d\mathfrak{m}} + \mathfrak{q}\frac{dT}{d\mathfrak{p}} - \mathfrak{p}\frac{dT}{d\mathfrak{q}} + \mathfrak{M}_{\mathfrak{z}}.
\end{aligned}\right\}\qquad (3)_2$$

Fatta l'ipotesi che la terna degli assi connessi col corpo abbia per origine il centro di massa, e sia formata cogli assi principali d'inerzia relativi a questo punto, dalla corrispondente espressione di T (§ 281), si otterrà immediatamente le forme speciali del § 350.

§ 495. — È immediata l'applicazione al caso del sistema di un numero qualunque di corpi rigidi liberi.

Supposto che un corpo rigido abbia un punto fisso, e questo sia il punto (α, β, γ), la posizione del corpo sarà determinata dalle nove variabili α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$, funzioni di tre variabili indipendenti; e la parte del calcolo precedente che concerne le equazioni del tipo (1, § 494) relative a queste variabili fornisce la terna $(2)_2$, donde si deduce, nel modo che s'è visto, la terna $(2)_3$; le quali sono le due forme corrispondenti delle equazioni del movimento nel caso attuale, che nell'ipotesi che il punto fisso sia l'origine degli assi, e questi i relativi assi principali d'inerzia, si riducono senz'altro a quelle più semplici del § 426.

Principio della bilancia.

§ 496. — Applichiamo il metodo in discorso ad una questione che contiene il principio del movimento e dell'equilibrio della *bilancia*.

Siano tre corpi rigidi, uno dei quali abbia una retta fissa (asse fisso), e gli altri due ciascuno una retta parallela a quella, comune col primo corpo (asse di ciascuno dei due corpi); e queste parallele giacciano in uno stesso piano, contenente la retta fissa (piano degli assi), dalle due parti opposte di essa. Chiameremo il primo corpo " corpo centrale ", e gli altri due, " primo " e " secondo laterale ". È chiaro che la posizione del corpo centrale è determinata dall'angolo formato con un semipiano fisso terminato al suo asse dal semipiano terminato allo stesso asse, perpendicolare al piano dei tre assi, volto nell'uno o nell'altro senso: in seguito a che la posizione di ciascun corpo è data dall'angolo formato con un semipiano così orientato dal semipiano terminato all'asse rispettivo e contenente il suo centro di massa. Quindi la posizione del sistema è determinata da questi tre angoli: cioè da tre coordinate indipendenti (§ 488).

Intenderemo che il senso in cui questi tre angoli crescono sia concorde rispetto ad uno stesso senso dei tre rispettivi assi; e immaginata una perpendicolare ai tre assi, così volta che rispetto a quel senso sia positivo il giro che, dal semipiano di riferimento perpendicolare al piano dei tre assi, conduce ad essa per l'angolo retto, chiameremo primo e secondo corpo laterale i due corpi laterali i cui assi sono da essa, secondo quel senso, successivamente incontrati.

Indichiamo le misure dei tre angoli suddetti con θ, θ_1, θ_2: con m, m_1, m_2 le grandezze delle masse dei tre corpi, centrale, primo e secondo laterale: con s, s_1, s_2 quelle della distanza dei loro centri di massa dal rispettivo asse: con K, K_1, K_2 il loro momento d'inerzia rispetto agli assi medesimi: con a_1, a_2 le grandezze delle distanze degli assi del primo e del secondo corpo dall'asse centrale.

La forza viva del corpo centrale avrà per grandezza (§ 276):

$$\frac{1}{2} K \theta'^2$$

L'atto di movimento dei due corpi laterali riesce composto di un atto rotatorio con velocità angolare di misura θ' e l'asse fisso per asse di rotazione, e d'un atto rotatorio con velocità angolare di misura θ'_i ($i = 1, 2$), e per asse di rotazione l'asse rispettivo; e per conseguenza sarà pure un atto di movimento rotatorio coll'asse istantaneo di rotazione parallelo ai due precedenti, compreso nel loro piano, al termine del segmento perpendicolare all'asse del corpo, avente l'origine su questo asse, e per senso positivo quello che va dall'asse del primo all'asse del secondo, di misura rispettivamente $a_1 \dfrac{\theta'}{\theta'_1 + \theta'}$ e $- a_2 \dfrac{\theta'}{\theta' + \theta'_2}$: mentre la misura della velocità angolare corrispondente sarà $\theta'_1 + \theta'$ e $\theta' + \theta'_2$ (§ 156). Il momento d'inerzia di ciascun corpo rispetto al rispettivo asse dell'atto rotatorio risultante sarà quindi (§ 278):

$$K_1 + m_1 \frac{a_1^2 \theta'^2}{(\theta'_1 + \theta')^2} - 2 m_1 \frac{a_1 \theta'}{\theta'_1 + \theta'} s_1 \sin \theta_1 ,$$

$$K_2 + m_2 \frac{a_2^2 \theta'^2}{(\theta' + \theta'_2)^2} + 2 m_2 \frac{a_2 \theta'}{\theta' + \theta'_2} s_2 \sin \theta_2 ;$$

e per conseguenza la grandezza del doppio della forza viva (§ 276):

$$K_1 (\theta'_1 + \theta')^2 + m_1 a_1^2 \theta'^2 - 2 m_1 a_1 \theta' (\theta'_1 + \theta') s_1 \sin \theta_1,$$

$$K_2 (\theta' + \theta'_2)^2 + m_2 a_2^2 \theta'^2 + 2 m_2 a_2 \theta' (\theta' + \theta'_2) s_2 \sin \theta_2. \text{*}$$

---

* Osserviamo come le stesse formole si possano calcolare anche servendosi dell'espressione della forza viva nel movimento relativo, trovata al § 282. Considerando, per fissare le idee, il primo corpo laterale, il suo movimento relativo ad una terna d'assi in movimento traslatorio coll'origine nel centro di massa è rotatorio, intorno ad un asse parallelo a quello del corpo, passante pel centro di massa, e velocità angolare di misura $(\theta + \theta_1)'$ per modo che

$$2 T = (K_1 - m_1 s_1^2) (\theta + \theta_1')^2.$$

Per aver poi la grandezza v della velocità del centro di massa, possiamo notare che il movimento del corpo relativo ad una terna d'assi in moto traslatorio di cui uno sia l'asse del corpo stesso, è rotatorio, intorno a questo asse, con ve-

Si conclude per la grandezza della forza viva del sistema:

$$2T = (K + K_1 + K_2 + m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 - 2 m_1 a_1 s_1 \sin \theta_1 + 2 m_2 a_2 s_2 \sin \theta_2) \theta'^2 + 2 (K_1 - m_1 a_1 s_1 \sin \theta_1) \theta' \theta'_1 + 2 (K_2 + m_2 a_2 s_2 \sin \theta_2) \theta' \theta'_2 + K_1 \theta'^2_1 + K_2 \theta'^2_2.$$

Tutto ciò è indipendente dalle forze e pressioni prestabilite corrispondenti al movimento. Noi vogliamo ora considerare il movimento determinato dalla gravità, nell'ipotesi che i tre assi siano perpendicolari al filo a piombo; nel qual caso il semipiano fisso terminato all'asse fisso donde si conta l'angolo θ si assumerà orientato come il filo a piombo, e il semipiano che ne forma il termine, e si è supposto perpendicolare al piano degli assi, volto in tal senso da formare con esso il semipiano parimente terminato all'asse fisso, contenente il centro di massa del corpo centrale, un angolo acuto — escludiamo il caso dell'angolo retto — la cui misura indicheremo con δ. Avremo in tal caso il potenziale, rappresentato da

$$W = g (m \bar{z} + m_1 \bar{z}_1 + m_2 \bar{z}_2),$$

dove:

$$\bar{z} = s \cos (\delta + \theta),$$
$$\bar{z}_1 = s_1 \cos (\theta_1 + \theta) + a_1 \sin \theta,$$
$$\bar{z}_2 = s_2 \cos (\theta + \theta_2) - a_2 \sin \theta.$$

Di qui scaturiscono le condizioni d'equilibrio (§ 493):

$$m s \sin (\delta + \theta) - (m_1 a_1 - m_2 a_2) \cos \theta = 0,$$
$$\sin (\theta_1 + \theta) = 0, \qquad \sin (\theta + \theta_2) = 0;$$

locità angolare di misura $(\theta + \theta_1)'$, e perciò la velocità del centro di massa composta delle due le cui misure sono $a_1 \theta'$ e $s_1 (\theta + \theta_1)'$, mentre l'angolo degli assi risulta $\frac{\pi}{2} + \theta_1$: donde si ricava

$$v^2 = a_1^2 \theta'^2 + s_1^2 (\theta + \theta_1)'^2 - 2 a_1 s_1 \theta' (\theta + \theta_1)' \sin \theta_1.$$

Al qual risultato si giunge anche, in modo analogo, notando che il movimento del corpo relativo ad una terna d'assi fissi al corpo centrale è rotatorio, intorno al proprio asse, con velocità angolare di misura θ'_1, mentre quella terna riesce in movimento rotatorio intorno all'asse fisso con velocità angolare di misura θ': e, ciò premesso, componendo le velocità del centro di massa appartenenti a questi due movimenti, ch'è pur agevole calcolare.

ossia:

$$\tan\theta = \frac{m_1 a_1 - m_2 a_2 - ms\sin\delta}{ms\cos\delta}, \quad \theta_1 + \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, \quad \theta + \theta_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}; \tag{1}$$

la prima delle quali, nell'ipotesi che siano abbastanza piccoli δ e $\frac{m_1 a_1 - m_2 a_2}{ms}$, per modo che adeguatamente piccolo $\tan\theta$, si riduce, trascurando l'aggiunta delle potenze superiori alla prima e dei prodotti di δ e $\tan\theta$, sensibilmente a

$$\tan(\delta + \theta) = \frac{m_1 a_1 - m_2 a_2}{ms}. \tag{2}$$

Cioè il piano degli assi formerà col piano perpendicolare al filo a piombo, contenente, se si vuole, l'asse centrale, stabilita la parte, un certo angolo: che se è $ms\,|\sin\delta| < |m_1 a_1 - m_2 a_2|$, il piano medesimo inclinerà *in basso* dalla parte del corpo laterale per cui $m_i a_i$ è maggiore; oltre di che i centri di massa dei due corpi laterali giaceranno nel piano passante pel rispettivo asse, parallelo al filo a piombo.

Si rileva senz'altro che W riceve valor massimo per $\theta + \delta$ compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, $\theta_1 + \theta = 0$, $\theta + \theta_2 = 0$: cioè il centro di massa di ciascun corpo *al di sotto* del piano perpendicolare al filo a piombo passante pel rispettivo asse. E per conseguenza si ha con questa ipotesi posizione d'equilibrio stabile.

Osserviamo che, per la prima delle (1), è condizione necessaria e sufficiente perchè con masse diverse dei due corpi laterali, le cui grandezze siano m_1, m_2, in un caso, e $m_1 + \mu_1$, $m_2 + \mu_2$ nell'altro, *caeteris paribus*, si abbia l'equilibrio, e l'angolo θ sia lo stesso in entrambi i casi, che sia:

$$\mu_1 a_1 = \mu_2 a_2;$$

relazione che, quando si verifica, permette di ridurre la determinazione del rapporto di due masse a quella di due lunghezze. Questo è il noto principio della bilancia.

In secondo luogo, posto, come $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, anche $\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, oltre di che definito α con

$$\tan\alpha = \frac{m_1 a_1 - m_2 a_2}{ms\cos\delta} - \tan\delta, \tag{3}$$

e la condizione che $\alpha + \delta$ sia compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, le equazioni del movimento risultano:

$$(K + m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)\theta'' - m_1 a_1 s_1 \left(\sin\theta_1 (\theta_1 + \theta)'' + \cos\theta_1 (\theta_1 + \theta)'^2\right)$$
$$+ m_2 a_2 s_2 \left(\sin\theta_2 (\theta_2 + \theta)'' + \cos\theta_2 (\theta_2 + \theta)'^2\right) = -g m s \frac{\cos\delta}{\cos\alpha}\sin(\theta - \alpha),$$
$$K_1 (\theta_1 + \theta)'' - m_1 a_1 s_1 (\sin\theta_1 \theta'' - \cos\theta_1 \theta'^2) = -g m_1 s_1 \sin(\theta_1 + \theta),$$
$$K_2 (\theta + \theta_2)'' + m_2 a_2 s_2 (\sin\theta_2 \theta'' - \cos\theta_2 \theta'^2) = -g m_2 s_2 \sin(\theta + \theta_2);$$

delle quali le ultime due si deducono direttamente dal tipo (5, § 489), applicandolo alle θ_1, θ_2, mentre la prima è un'ovvia combinazione di queste due con quella che si deduce dallo stesso tipo, applicato a θ.

Poniamo:

$$\theta - \alpha = \varphi, \qquad \theta_1 + \delta = \varphi_1, \qquad \theta + \theta_2 = \varphi_2;$$

per modo che φ, φ_1, φ_2 dinotino le misure degli angoli formati dal semipiano terminato all'asse del corpo centrale, e del primo e secondo corpo laterale, contenente il rispettivo centro di massa, colla sua orientazione relativa alla posizione d'equilibrio stabile. Le precedenti equazioni potranno scriversi anche così:

$$\begin{aligned}
&(K + m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - m_1 a_1 s_1 \sin(\varphi_1 - \varphi - \alpha)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + m_2 a_2 s_2 \sin(\varphi_2 - \varphi - \alpha)\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} \\
&- m_1 a_1 s_1 \cos(\varphi_1 - \varphi - \alpha)\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + m_2 a_2 s_2 \cos(\varphi_2 - \varphi - \alpha)\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 = -g m s \frac{\cos\delta}{\cos\alpha}\sin\varphi, \\
&- m_1 a_1 s_1 \sin(\varphi_1 - \varphi - \alpha)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + K_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + m_1 a_1 s_1 \cos(\varphi_1 - \varphi - \alpha)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\
&\qquad = -g m_1 s_1 \sin\varphi_1 \\
&m_2 a_2 s_2 \sin(\varphi_2 - \varphi - \alpha)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + K_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - m_2 a_2 s_2 \cos(\varphi_2 - \varphi - \alpha)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\
&\qquad = -g m_2 s_2 \sin\varphi_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ora, supposto che, ad un istante, φ, φ_1, φ_2 e

$$\sqrt{\frac{s}{g}}\,\frac{d\varphi}{dt}, \quad \sqrt{\frac{s_1}{g}}\,\frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \sqrt{\frac{s_2}{g}}\,\frac{d\varphi_2}{dt}$$

siano abbastanza prossimi a zero, ciò vuol dire che sarà la posizione del sistema abbastanza vicina alla posizione d'equilibrio stabile, e la forza viva abbastanza piccola; in seguito a che, in tutto il corso del movimento, il sistema non si scosterà oltre certi limiti dalla posizione d'equilibrio stabile medesima, e la forza viva non oltrepasserà un certo termine (§ 375).

Ciò premesso, ammettiamo che, in tutto il corso del movimento, i suddetti numeri si mantengano abbastanza piccoli per essere sensibilmente trascurabile l'aggiunta delle loro potenze superiori alla prima e dei loro prodotti. La stessa proprietà si estende, per le precedenti equazioni (5) a

$$\frac{s}{g}\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad \frac{s_1}{g}\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}, \quad \frac{s_2}{g}\frac{d^2\varphi_2}{dt},$$

come immediatamente si riconosce, concependole come equazioni algebriche lineari, ove queste fungono da incognite. E con ciò le equazioni medesime si riducono approssimativamente a

$$(K + m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1 a_1 s_1 \sin\alpha \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - m_2 a_2 s_2 \sin\alpha \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}$$

$$= - g m s \frac{\cos\delta}{\cos\alpha}\varphi,$$

$$m_1 a_1 s_1 \sin\alpha \frac{d^2\varphi}{dt^2} + K_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = - g m_1 s_1 \varphi_1,$$

$$- m_2 a_2 s_2 \sin\alpha \frac{d^2\varphi}{dt^2} + K_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = - g m_2 s_2 \varphi_2;$$

semplice sistema d'equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, che si può integrare senza difficoltà.

Per l'applicazione alla bilancia, è particolarmente interessante il caso che $|\alpha|$ sia nullo, o almeno dell'ordine di piccolezza dei rimanenti numeri già supposti piccoli per stabilire le suddette equazioni approssimative; ciò che implica la stessa ipotesi su $\left|\frac{m_1 a_1 - m_2 a_2}{m s \cos\delta} - \tan\delta\right|$: la quale sarà soddisfatta, se lo è separatamente da $\frac{|m_1 a_1 - m_2 a_2|}{m s}$ e $|\delta|$, com'è il caso delle bilancie ordinarie.

In tal caso le tre equazioni si riducono tutte al tipo:

$$\frac{d^2 \omega}{d t^2} + \lambda^2 \omega = 0,$$

donde si deducono rispettivamente colle ipotesi:

$$\omega = \varphi, \quad \lambda^2 = \frac{g\, m\, s \cos \delta}{K + m_1\, a_1^{\,2} + m_2\, a_2^{\,2}};$$

$$\omega = \varphi_1, \quad \lambda^2 = \frac{g\, m_1\, s_1}{K_1};$$

$$\omega = \varphi_2, \quad \lambda^2 = \frac{g\, m_2\, s_2}{K_2}.$$

E perciò il movimento dei due corpi laterali intorno ai rispettivi assi risulta quello di due eguali pendoli (§ 443); e il movimento del corpo centrale si deduce immediatamente da quello di un pendolo di cui il momento d'inerzia rispetto all'asse fisso sia $K + m_1\, a_1^{\,2} + m_2\, a_2^{\,2}$, sostituendo al semipiano terminato all'asse orientato come il filo a piombo, quello che forma con esso l'angolo α dalla debita parte.

Tali ipotesi convengono alla bilancia, come s'adopera per le ricerche fisiche e chimiche; poichè la posizione d'equilibrio del *giogo* è assai prossimamente orizzontale, e così il giogo come i *piatti* compiono ristrettissime oscillazioni intorno alla posizione d'equilibrio stabile. Vediamo così che le oscillazioni del giogo sono conformi alla legge del pendolo: che queste oscillazioni non sono modificate da quelle dei piatti: che le oscillalazioni dei due piatti, intorno al rispettivo *coltello*, sono indipendenti l'una dall'altra e da quella del giogo, e seguono la legge del pendolo, per modo che *mancano*, se è nulla la velocità angolare del piatto all'istante che il suo centro di massa giace nel piano verticale passante pel coltello. *

§ 497. — Esattamente il movimento traslatorio d'un corpo laterale non è possibile; come subito si rileva, introducendo

* Una teoria della bilancia fondata sul movimento, anzi che sulle ordinarie considerazioni relative all'equilibrio, sembra tanto più opportuna, se si riflette che, almeno nelle pesate rigorose, si adopera la bilancia come una macchina in movimento.

nelle (5, § 496) l'ipotesi che φ_1 o φ_2 si mantenga costante, donde anche φ'_1 o φ'_2 costantemente nullo.

E neppure è possibile il movimento rigido del sistema formato dai tre corpi; come analogamente si riconosce, introducendo nelle (4, § 496) l'ipotesi θ_1, θ_2 *costanti*, $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$.

§ 498. — Facendo nella precedente trattazione $m_2 = 0$, in conseguenza di che $K_2 = 0$, ne viene l'analoga teoria del movimento di due corpi rigidi vincolati, l'uno avente una retta fissa, e l'altro, comune con esso una retta parallela. Questo è il principio del movimento d'una campana e suo battaglio. È notevole che, nel caso della gravità. è allora possibile, con certe relazioni tra i dati intrinseci del sistema, il movimento rigido.

Difatti, colle suddette ipotesi, e supposto inoltre che il centro di massa del corpo girevole intorno all'asse fisso sia nel semipiano terminato all'asse medesimo, passante per l'asse mobile, si ottiene dalle (4, § 496):

$$\left(K + m_1 a_1^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} - m_1 a_1 s_1\left(\sin\theta_1 \frac{d^2(\theta_1+\theta)}{dt^2} + \cos\theta_1\left(\frac{d(\theta_1+\theta)}{dt}\right)^2\right)$$

$$= g\left(ms + m_1 a_1\right)\cos\theta,$$

$$K_1 \frac{d^2(\theta_1+\theta)}{dt^2} - m_1 a_1 s_1\left(\sin\theta_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} - \cos\theta_1\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = -g m_1 s_1 \sin(\theta_1+\theta);$$

le quali sono soddisfatte da $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\theta'_1 = 0$, con qualunque valore di t — cioè il centro di massa del corpo girevole intorno all'asse mobile, ad ogni istante, nel suddetto semipiano, fuori dalla parte contenuta dai due assi — purchè si verifichi la relazione:

$$\frac{K + m_1 a_1 (a_1 + s_1)}{ms + m_1 a_1} = \frac{K_1 + m_1 a_1 s_1}{m_1 s_1}.$$

Con ciò, posto altresì $\theta = \frac{\pi}{2} + \vartheta$, esse si riducono all'unica:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{ms + m_1 a_1}{(K + m_1 a_1 (a_1 + s_1))g}\sin\vartheta = 0:$$

equazione del movimento del pendolo (§ 437), il cui asse è l'asse fisso, il centro di massa si trova nel semipiano terminato

a questo asse passante per l'asse mobile, e la lunghezza è rappresentata dal valor comune dei due precedenti rapporti, * ossia da:

$$\frac{K+K_1+m_1a_1^2+2m_1a_1s_1}{ms+m_1(a_1+s_1)},$$

che rappresenta appunto la lunghezza del pendolo costituito dai due corpi, concepiti come invariabilmente uniti, nelle ipotesi precedenti (cfr. § 278).

Sulle Macchine.

§ 499. — Il principio delle *Macchine*, destinate a produrre una determinata forma di movimento, e, come caso speciale, l'equilibrio, si trova, in generale, nel movimento di un insieme di corpi vincolati, a cui sono applicati convenienti sistemi di forze e pressioni. D'altronde, la teoria delle diverse macchine è compito della Meccanica Applicata; per modo che, su questo argomento, ci limiteremo qui a qualche considerazione elementare.

§ 500. — In generale, giova distinguere quei sistemi di forze e pressioni, che, dipendendo da circostanze che il meccanico può, fra certi limiti, variare ad arbitrio, appariscono come a sua disposizione. Essi formano insieme il " sistema delle potenze „; mentre i rimanenti costituiscono, in modo analogo, il " sistema delle resistenze „. La risultante dei due sistemi si dice la " potenza „ e la " resistenza „ rispettivamente: particolarmente nel caso che ammettano asse d'applicazione; e allora si distinguono gli assi d'applicazione della potenza e della resistenza, e se capita i loro punti d'applicazione.

Questo caso è da intendersi che si verifichi abbastanza frequentemente. Esso ha luogo per la gravità, e per ogni sistema di forze e pressioni applicate parallele o concorrenti. E sta approssimativamente quando forze e pressioni specifiche, variabili con continuità col punto relativo, sono applicate ad una porzione abbastanza limitata.

* Cfr. *Schell — Theorie der Bewegung und der Kräfte;* Th. IV, Cap. VII.

§ 501. — Concepita una macchina in movimento, e i vincoli indipendenti dal tempo, il teorema della forza viva fornisce, indicando con L_p, L_r le misure dei lavori del sistema delle potenze e delle resistenze, in un intervallo di tempo, e con ΔT l'incremento della misura della forza viva:

$$\Delta T = L_p + L_r;$$

donde se è $\Delta T = 0$;

$$L_p + L_r = 0.$$

Supponiamo che colla macchina sia connesso un corpo rigido, rotante intorno ad un asse, di momento d'inerzia rispetto all'asse, K, così grande, che, indicando con ω la velocità angolare al tempo t, sia sensibilmente T rappresentato da $\frac{1}{2} K\omega^2$, grandezza della forza viva di quel corpo: mentre il lavoro corrispondente al movimento dello stesso corpo, in confronto del rimanente, riesce trascurabile — e intanto sarà nullo il lavoro delle gravità, ove il centro di massa si trovi sull'asse. Sarà, per la precedente relazione:

$$\Delta (\omega^2) = 2 \frac{L_p + L_r}{K};$$

e perciò, se K è sufficientemente grande, approssimativamente $\Delta (\omega^2) = 0$, cioè ω costante, e il movimento rotatorio uniforme.

Questo è il principio del " volante ": la grande e pesante ruota, che si connette colle macchine, e risulta in movimento rotatorio prossimamente uniforme, come, nei casi in cui si adopera, per la regolare comunicazione del movimento ai varii organi della macchina, conviene che sia.

§ 504. — Sia ora una macchina in equilibrio. Supposto, ad esempio, che sia rappresentata da un solo corpo rigido vincolato, l'equilibrio, in conseguenza dei vincoli, potrà essere conseguito senza che siano eguali le grandezze dei risultanti dei sistemi delle potenze e delle resistenze, e dei loro momenti rispetto ad un punto: e se i due risultanti ammettono asse d'applicazione, semplicemente, senza che abbiano eguale grandezza: ma, per avventura, con una potenza di grandezza minore della resistenza

(§ 500). Allora, nel linguaggio famigliare, si dice che, con un dato sforzo, si elide uno sforzo superiore, coll'ajuto della macchina, di cui quello è appunto l'ufficio.

Da questo punto di vista giova considerare alcuni tipi semplici, che costituiscono le così dette " macchine semplici „ o " elementari „.

§ 503. *Leva.* — Ad un corpo rigido, girevole intorno ad un asse, " fulcro „, siano applicati due sistemi di forze e pressioni. Indichiamo con A_1, A_2 la componente secondo l'asse, preso in un certo senso, del risultante dei momenti dell'uno e dell'altro rispetto ad un punto qualunque dell'asse medesimo. Secondo il § 433 si ha, per l'equilibrio, la condizione:

$$A_1 + A_2 = 0.$$

Supponiamo che le risultanti dei due sistemi, potenza e resistenza, siano perpendicolari all'asse, e ammettano ciascuna asse d'applicazione. In tal caso, indicando con P, R le loro grandezze, e con p, r quella della distanza dell'asse del corpo dai loro rispettivi assi d'applicazione, la precedente condizione si traduce nelle due, che si verifichi la relazione:

$$Pp = Rr,$$

e siano di senso opposto, rispetto ad uno stesso asse, i giri conducenti per l'angolo minore di due retti dal raggio descritto dal fulcro perpendicolarmente sui due assi d'applicazione agli assi medesimi orientati come la risultante relativa.

§ 504. *Piano inclinato.* — Ad un corpo rigido obbligato a toccare un piano siano applicati due sistemi di forze, il piano delle cui risultanti, potenze e resistenza, sia a quello perpendicolare. Indichino P, R le grandezze delle due risultanti, e i, j gli angoli formati dalle loro orientazioni colla perpendicolare al piano resistente, volta in un certo senso. Abbiamo la condizione d'equilibrio (§ 449):

$$P \sin i + R \sin j = 0,$$

che sarà l'unica, se si escludono gli atti rotatorii. Supponiamo la potenza parallela al piano, e indichiamo con α l'angolo for-

mato dalla resistenza con un asse parallelo al piano, volto come la potenza, cioè l'angolo formato dalle due risultanti. La precedente relazione diventa:

$$P + R \cos \alpha = 0.$$

E così, coll'intervento del piano, l'effetto d'un sistema di forze e pressioni applicato ad un corpo si potrà elidere mediante un altro sistema la cui risultante ha semplicemente la grandezza della componente secondo un asse parallelo al piano della risultante di quello.

§ 505. — Per stabilire le condizioni d'equilibrio d'altre macchine semplici basta considerare due corpi vincolati in un certo modo, e ciascuno suscettibile, nella supposta posizione d'equilibrio, degli atti di movimento traslatorio secondo la direzione della risultante del relativo sistema. In tal caso, indicando con P, R le grandezze della potenza e della resistenza: con i, j gli angoli, zero o π, da esse formati colla corrispondente velocità virtuale: infine con ε, ζ le grandezze di queste velocità, l'equazione delle velocità virtuali si riduce a:

$$P \cos i \, \varepsilon + R \cos j \, \zeta = 0.$$

In base ai vincoli particolari del sistema si stabilirà un'equazione fra ε e ζ, per mezzo della quale una di esse si esprimerà in termini dell'altra. Sia quest'equazione:

$$b \varepsilon - a \zeta = 0.$$

Ricavandone ζ in termini di ε: sostituendo nella precedente relazione a ζ tale sua espressione: quindi sopprimendo il fattore ε, cui si può sempre attribuire un valore diverso da zero, concluderemo:

$$a P \cos i + b R \cos j = 0.$$

E questa si scinde in:

$$a P = b R, \qquad \cos i = - \cos j,$$

la seconda delle quali, avendosi anche una relazione fra i sensi delle velocità virtuali, fornirà una seconda condizione, concernente il senso delle due risultanti.

§ 506. — Si dice che due punti sono riuniti da un filo teso sopra una carrucola quando si stabilisce che appartengano al piano d'un certo cerchio, a cui si può descrivere da ciascun d'essi una tangente, in modo che uno stesso angolo formato dalle due tangenti comprenda il cerchio e i due punti: e, ciò posto, serbi valore costante, in ogni posizione dei punti e del cerchio, la somma delle lunghezze dei segmenti di tangenti compresi fra i punti e il cerchio, e dell'arco di cerchio terminato ai punti di contatto, dalla parte del vertice dell'angolo suddetto.

La perpendicolare al piano passante pel centro del cerchio si dice l'asse della carrucola, e il cerchio si concepisce, quando si vuole, come una sezione della carrucola normale all'asse. I due segmenti di tangenti si chiamano i tratti del filo tesi fra i punti e la carrucola: l'arco di cerchio compreso fra i punti di contatto, dalla parte indicata, il tratto teso sulla carrucola: la somma costante delle lunghezze, lunghezza del filo.

A seconda del caso, si stabilisce o no che il centro del cerchio resti fisso; e rispettivamente si dice la carrucola " fissa „ o " mobile „.

Finalmente, salvo affermare il contrario, si suole trascurare la massa della carrucola, ossia la sua densità in ogni punto (§ 410).

§ 507. *Carrucola fissa.* — I due sistemi di cui sono risultanti la potenza e la resistenza siano applicati a due corpi soggetti al vincolo che atti di movimento virtuali di ciascuno, nella supposta posizione d'equilibrio, sono puramente gli atti traslatorii secondo la direzione della relativa risultante, e un punto dell'uno è unito con un punto dell'altro mediante un filo teso sopra una carrucola fissa, in modo che i tratti di filo compresi fra i punti e la carrucola hanno la direzione della risultante relativa al corpo cui il punto appartiene.

Coi simboli del § 505, $\varepsilon = \zeta$, e i sensi delle due velocità sono, rispetto ad un senso determinato dell'*intero filo*, concordi. Quindi:

$$P = R,$$

e i sensi delle due risultanti, rispetto ad un senso dell'intero filo, discordi, cioè divergenti o convergenti.

§ 508. — *Carrucola mobile.* I sistemi di cui sono risultanti la potenza e la resistenza sono applicati a due corpi suscettibili, nella supposta posizione d'equilibrio, dei soli atti di movimento virtuali traslatorii nella direzione della relativa risultante: un punto del corpo cui è applicato il sistema delle resistenze è il centro del cerchio rappresentante la carrucola mobile: un punto dell'altro corpo è unito ad un punto fisso mediante un filo teso sulla carrucola, in modo che il raggio descritto dal centro coll'orientazione della resistenza divide per metà il tratto di filo teso sulla carrucola.

Immaginiamo la parallela descritta pel punto fisso alla corda terminata ai punti di contatto, e indichiamo con $2a$ la grandezza del suo segmento compreso fra il punto fisso e l'intersezione col tratto di filo compreso fra la carrucola e l'altro punto vincolato, o col suo prolungamento: con λ la lunghezza del filo: con ξ quella dei due tratti compresi fra la parallela suddetta e i punti di contatto: con σ la misura del segmento di tratto di filo terminato al punto non fisso avente l'origine sulla parallela e il termine in questo punto: con χ la misura del segmento perpendicolare alla parallela avente l'origine sopra di essa e il termine nel centro del cerchio: infine con ω l'angolo che i raggi descritti dal centro ai punti di contatto, da una parte e dall'altra, formano col raggio orientato come la resistenza. Avremo:

$$2\xi + 2R\omega + \sigma = \lambda, \quad \xi\cos\omega + R\sin\omega = a \quad R\cos\omega + \chi = \xi\sin\omega.$$

Di qui:

$$2\delta\xi + 2R\delta\omega + \delta\sigma = 0, \qquad \cos\omega\,\delta\xi - \chi\delta\omega = 0, \qquad \sin\omega\,\delta\xi + a\delta\omega - \delta\chi = 0;$$

e introducendo la seconda nella prima e nella terza:

$$\cos\omega\,\delta\sigma = -2(\chi + R\cos\omega)\,\delta\omega = -2\xi\sin\omega\,\delta\omega,$$
$$\cos\omega\,\delta\chi = (\chi\sin\omega + a\cos\omega)\,\delta\omega = \xi\,\delta\omega.$$

Ne viene (§ 506) che si ha:

$$\varepsilon : \zeta = 2\sin\omega,$$

e delle due velocità virtuali una ha senso opposto a quello della risultante relativa. Quindi:

$$2P\sin\omega = R,$$

e le orientazioni delle due risultanti divergenti o convergenti.

Estensione delle equazioni di Lagrange.

§ 509. — Abbiamo dedotto le equazioni di *Lagrange*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\xi'_i}\right) - \frac{dT}{d\xi_i} = \Xi_i, \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \xi'_i, \tag{1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

dal teorema di *Hamilton*:

$$\int_t^{t'} (\delta T + \Pi)\, dt = 0, \qquad \Pi = \Sigma_i\, \Xi_i\, \delta\xi_i\,; \tag{2}$$

e, reciprocamente, da esse si deduce questo teorema, eseguendo le stesse operazioni, in ordine inverso.

Ora, giova notare come questa duplice relazione sia indipendente dalla circostanza che il mobile si componga di un certo numero di parti rigide, e dallo stesso significato meccanico delle quantità che vi si riferiscono; per modo che stanno le (1), stabilito (2), e inteso che Π sia funzione delle n variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, e T di queste variabili e delle $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_n$.

Si vede così che, collo stesso significato dei simboli, le equazioni di *Lagrange* potranno applicarsi ad altre specie di movimento; e con un significato convenientemente adattato, si estenderanno anche ad un campo più vasto di fenomeni naturali, per cui si possa stabilire un'equazione generale analoga a (2) *.

* Con questo cenno, senza commenti, che ci porterebbero lontano dai nostri confini, richiamiamo l'attenzione del lettore sull'estensione delle equazioni di *Lagrange*, e implicitamente del teorema di *Hamilton*, e suoi equivalenti, che comincia coll'applicazione fattane da *Maxwell* all'indagine dei fenomeni elettromagnetici.

V. *Maxwell. — A treatise on Electricity and Magnetism.* — Oxford 1881. — Part. II. Chap. V. *Beltrami. — Sull'estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica. — Rendic. della R. Acc. dei Lincei,* 1889. *v. Helmholtz. — Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. — Giornale di Crelle,* T. 100.

CAPITOLO IV.

CORPI VARIABILI.

Diverse ipotesi sulle pressioni.

§ 510. — Nelle questioni precedenti il mobile è supposto in movimento rigido, o composto di un certo numero di parti, ciascuna in movimento rigido. Ampliando le condizioni, supporremo d'ora in avanti un movimento continuo regolare qual si voglia (§ 127), subordinato alle circostanze occorrenti perchè si verifichino le proprietà generali della pressione a suo luogo dedotte (§ 392 e seguenti).

Colla condizione della rigidità ci bastava, per determinare il movimento, di fare alcune ipotesi *a priori* sul risultante delle pressioni applicate ai punti della superficie d'ogni parte rigida, e loro momenti rispetto ad un punto. Una volta determinato il movimento, questi due vettori, per ogni parte rigida, riescono note funzioni del tempo. E ne viene, per la pressione specifica (X_n, Y_n, Z_n) nei punti della superficie, relativa alla normale interna, o dalla parte considerata, la condizione che $\int X_n \, d\sigma$, $\int (y Z_n - z Y_n) \, d\sigma$ e gli analoghi integrali debbono essere le funzioni note del tempo che corrispondono ai suddetti vettori.

Questa condizione *a posteriori* è implicita in quella a cui deve soddisfare la pressione specifica nei singoli punti (x, y, z), relativa ad ogni raggio, al tempo t, che i corrispondenti parametri X_x, Y_y, Z_z, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$, verifichino:

$$\left.\begin{aligned} k\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X_1\right) + \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} = 0, \\ k\left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y_1\right) + \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} = 0, \\ k\left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z_1\right) + \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(cfr. § 399); dove, determinato il movimento, il primo termine riesce una funzione nota di t e di $x_0\ y_0\ z_0$, coordinate iniziali che distinguono il punto considerato, e quindi anche di t, x, y, z *.

Reciprocamente, supposto un movimento continuo regolare qualunque, pel quale stiano queste relazioni, e assunte *a priori* per $X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z = Z_y,\ Z_x = X_z,\ X_y = Y_x$ certe funzioni di t e delle x, y, z, k, oltre di che, se occorre, delle loro derivate rispetto a t, x_0, y_0, z_0, ciò che vale fare una certa ipotesi sull'insieme delle pressioni specifiche in ogni punto del corpo, ad ogni istante, le relazioni stesse, insieme coll'equazione della conservazione della massa (§ 240), formano un sistema di *quattro* equazioni fra le quattro variabili x, y, z, e k, che potrà servire a determinarle in funzione del tempo t.

Dovranno poi verificarsi (§ 398):

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

le quali, applicate ai punti del contorno del mobile, e alla normale interna, ogniqualvolta la pressione specifica in questi punti, dalla parte del corpo, sia prestabilita con una legge speciale, rappresentano altrettante condizioni che le soluzioni delle precedenti equazioni, valide per tutto lo spazio occupato dal corpo, debbono soddisfare alla sua superficie.

Così, in generale, si indaga il movimento continuo regolare in discorso. Le (1) danno luogo alle così dette " equazioni indefinite ", e le (2) alle " equazioni al contorno ". Le suddette ipotesi sulla pressione debbono poi scegliersi diversamente, a seconda del caso, col criterio che si riproducano in modo soddisfacente le circostanze caratteristiche del caso, e le conseguenze risultino conformi all'esperienza, entro i limiti richiesti.

* Intorno a simile sistema di equazioni cfr. *Morera. — Sulla soluzione delle equazioni indefinite dell'equilibrio dei corpi continui* — nei *Rendic. della R. Acc. dei Lincei.* Serie 5ª, Vol. I.

Movimento prossimamente rigido.

§ 511. — Dopo l'ipotesi del movimento rigido si presenta naturalmente quella d'un movimento che ne differisce abbastanza poco per poter sensibilmente trascurare l'aggiunta di certe quantità, e semplificare in tal modo le relative ricerche.

Ora, il movimento rigido è, se si vuole, quello per cui si può connettere col mobile una terna d'assi ortogonali, rispetto alla quale il mobile si mantiene in equilibrio relativo; o, più generalmente, una terna d'assi ortogonali tali che il movimento relativo ad essa è traslatorio: per modo che lo spostamento corrispondente al passaggio da una posizione di riferimento prestabilita alla posizione ad ogni istante, in quel movimento relativo, implica un eguale spostamento di tutti i punti.

Conformemente a ciò, chiameremo movimento prossimamente rigido di un dato ordine ogni movimento per cui si può associare al mobile una terna d'assi ortogonali, rispetto alla quale riesce definita una certa posizione d'equilibrio relativo, — posizione di riferimento, — e tale che, nel movimento relativo ad essa, è un numero estremamente piccolo del supposto ordine, ad ogni istante, per ogni coppia di punti, il rapporto fra lo spostamento, che si deve comporre, per dedurre, l'uno dall'altro, i loro spostamenti corrispondenti al passaggio dalla posizione di riferimento alla posizione attuale, e la loro mutua distanza in quella posizione.

Chiamiamo poi estremamente piccolo di n^{mo} ordine un numero così piccolo da poter trascurare senza errore sensibile l'aggiunta di B ad A, quando il rapporto di B ad A è una potenza d'esso numero d'esponente almeno eguale a n.

Ciò premesso, concepiamo la terna degli assi mobili, rispetto alla quale $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$, e $x_0 + \Delta x + \xi + \Delta\xi$, $y_0 + \Delta y + \eta + \Delta\eta$, $z_0 + \Delta z + \zeta + \Delta\zeta$ siano le coordinate di due punti qualunque del mobile ad un tempo qualsivoglia, con x_0, y_0, z_0 e Δx, Δy, Δz, invariabili col tempo, per modo che (x_0, y_0, z_0), $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ rappresentano due posti

invariabilmente uniti agli assi mobili, che intenderemo siano quelli dei due punti nella posizione di riferimento, immaginata cogli assi mobili invariabilmente connessa.

Avremo, secondo il § 106:

$$\Delta\xi = d\xi + \varepsilon_x, \quad \Delta\eta = d\eta + \varepsilon_y, \quad \Delta\zeta = d\zeta + \varepsilon_z,$$

dove:

$$\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \tag{1}$$

tende con $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ — grandezza della mutua distanza dei punti nella posizione di riferimento — a zero; e noi supporremo che vi tenda uniformemente: cioè che, fissato ε piccolo a piacere, vi sia ρ indipendente da x_0, y_0, z_0, tale che, sotto la condizione che detta grandezza sia minore di ρ, quel rapporto riesce in valore assoluto minore di ε.

La premessa definizione del movimento prossimamente rigido di n^{mo} ordine chiaramente si riduce ad essere numeri estremamente piccoli di questo ordine i rapporti:

$$\frac{\Delta\xi}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \frac{\Delta\eta}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \frac{\Delta\zeta}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}. \tag{2}$$

E ciò si conseguisce, supponendo numeri di quell'ordine i coefficienti $\frac{d\xi}{dx_0}$, $\frac{d\xi}{dy_0}$, $\frac{d\xi}{dz_0}$, $\frac{d\eta}{dx_0}$ ecc. per *tutti* i punti del campo rappresentato dal corpo nella posizione di riferimento.

Difatti, supponiamo, per fissar le idee, che la retta terminata ai punti considerati giaccia tutto in quel campo. Allora, presa sopra di essa una successione di punti (x_0', y_0', z_0') qualsivoglia, avremo:

$$\Delta\xi = \Sigma\,\Delta\xi' = \Sigma\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}\,\frac{\Delta\xi'}{\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}},$$

dove la sommatoria comprende (x_0, y_0, z_0) e tutti i punti interpolati; e convenuto che la mutua distanza d'ogni coppia di punti consecutivi sia inferiore al termine occorrente perchè il rapporto (1), per le coppie medesime, riesca un numero del prescritto

ordine di piccolezza, siccome, nell'ipotesi in discorso, risulterà di quell'ordine di piccolezza il rapporto:

$$\frac{\Delta\xi'}{\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}},$$

e, d'altra parte, è, qualunque sia la successione:

$$\Sigma\sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

si conclude che sarà senz'altro dello stesso ordine il primo dei rapporti (2), c. v. d.

La stessa conclusione si estende poi senza difficoltà al caso che la congiungente i due punti non fosse tutta compresa nel campo; perchè il precedente ragionamento si applicherà alla più breve linea terminata ai due punti, tutta compresa nel campo: e questa si potrà supporre dello stesso ordine di grandezza della sua corda, cioè della mutua distanza dei due punti. (Cfr. § 108.)

Movimento prossimamente rigido di 1.° ordine.

§ 512. — Posto:

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta,$$

e indicata con V una funzione di x, y, z, si ha in generale:

$$\frac{dV}{dx_0} = \frac{dV}{dx}\left(1 + \frac{d\xi}{dx_0}\right) + \frac{dV}{dy}\frac{d\eta}{dx_0} + \frac{dV}{dz}\frac{d\zeta}{dx_0}.$$

Quindi, sensibilmente:

$$\frac{dV}{dx_0} = \frac{dV}{dx}; \tag{1}$$

relazione che serve di base alle principali semplificazioni del caso in discorso.

§ 513. — Per questa relazione, l'equazione della continuità può scriversi:

$$\frac{dk}{dt} + k\left(\frac{du}{dx_0} + \frac{dv}{dy_0} + \frac{dw}{dz_0}\right) = 0;$$

donde, scambiando le differenziazioni rispetto a t e a x_0, y_0, z_0, e scrivendo opportunamente:

$$\frac{d(\log k + \varkappa)}{dt} = 0,$$

ove (§ 108):

$$\varkappa = \frac{d\xi}{dx_0} + \frac{d\eta}{dy_0} + \frac{d\zeta}{dz_0}.$$

Di qui:

$$k = k_0 e^{-\varkappa},$$

e sensibilmente:

$$k = k_0; \qquad (1)$$

cioè la densità sensibilmente invariabile in ogni punto del mobile, in qualunque sua posizione.

§ 514. — Rappresentino (Ξ_0, Υ_0, Z_0) e $((X_n)_0, (Y_n)_0, (Z_n)_0)$ la forza acceleratrice limite, e la pressione specifica relativa al raggio n nel punto qualunque del mobile, nell'ipotesi che, rispetto alla supposta terna d'assi mobili, si mantenga in equilibrio, nella posizione che abbiamo chiamato di riferimento; e vi siano comprese anche le forze apparenti corrispondenti al movimento degli assi (§ 326). Sarà (§ 405):

$$k_0 \Xi_0 - \frac{d(X_x)_0}{dx_0} - \frac{d(X_y)_0}{dy_0} - \frac{d(X_z)_0}{dz_0} = 0,$$
$$k_0 \Upsilon_0 - \frac{d(Y_x)_0}{dx_0} - \frac{d(Y_y)_0}{dy_0} - \frac{d(Y_z)_0}{dz_0} = 0,$$
$$k_0 Z_0 - \frac{d(Z_x)_0}{dx_0} - \frac{d(Z_y)_0}{dy_0} - \frac{d(Z_x)_0}{dz_0} = 0.$$

Indicando poi con (Ξ, Υ, Z) e (X_n, Y_n, Z_n) i vettori analoghi, nell'ipotesi che il movimento relativo alla stessa terna mobile sia il considerato movimento prossimamente rigido, si ha analogamente:

$$k\frac{d^2\xi}{dt^2} = k\,\Xi - \frac{dX_x}{dx} - \frac{dX_y}{dy} - \frac{dX_x}{dz},$$
$$k\frac{d^2\eta}{dt^2} = k\,\Upsilon - \frac{dY_x}{dx} - \frac{dY_y}{dy} - \frac{dY_z}{dz},$$
$$k\frac{d^2\zeta}{dt^2} = k\,Z - \frac{dZ_x}{dx} - \frac{dZ_y}{dy} - \frac{dZ_z}{dz}.$$

Quindi, tenuto calcolo di (1, § 512) e (1, § 513):

$$\left.\begin{aligned} k_0 \frac{d^2\xi}{dt^2} &= k_0\,\Delta\Xi - \frac{d\,\Delta X_x}{dx_0} - \frac{d\,\Delta X_y}{dy_0} - \frac{d\,\Delta X_z}{dz_0}, \\ k_0 \frac{d^2\eta}{dt^2} &= k_0\,\Delta\Upsilon - \frac{d\,\Delta Y_x}{dx_0} - \frac{d\,\Delta Y_y}{dy_0} - \frac{d\,\Delta Y_z}{dz_0}, \\ k_0 \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= k_0\,\Delta Z - \frac{d\,\Delta Z_x}{dx_0} - \frac{d\,\Delta Z_y}{dy_0} - \frac{d\,\Delta Z_z}{dz_0}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove $\Delta\Xi = \Xi - \Xi_0$, e le analoghe.

§ 515. — Dalle equazioni così trovate, adoperando il procedimento del § 404, si deduce, col noto significato dei simboli:

$$\left.\begin{aligned} &\int k\left\{\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta\Xi\right)\delta\xi + \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - \Delta\Upsilon\right)\delta\eta + \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \Delta Z\right)\delta\zeta\right\}d\tau \\ &\qquad = \int\left(\Delta X_n\,\delta\xi + \Delta Y_n\,\delta\eta + \Delta Z_n\,\delta\zeta\right)d\sigma \\ &\qquad + \int\left[\Delta X_x \frac{d\,\delta\xi}{dx_0} + \Delta Y_y \frac{d\,\delta\eta}{dy_0} + \Delta Z_z \frac{d\,\delta\zeta}{dz_0}\right. \\ &+ \left.\Delta Y_z\left(\frac{d\,\delta\eta}{dz_0} + \frac{d\,\delta\zeta}{dy_0}\right) + \Delta Z_x\left(\frac{d\,\delta\zeta}{dx_0} + \frac{d\,\delta\xi}{dz_0}\right) + \Delta X_y\left(\frac{d\,\delta\xi}{dy_0} + \frac{d\,\delta\eta}{dx_0}\right)\right]d\tau, \end{aligned}\right\} (1)$$

che è il teorema di *d' Alembert* pel movimento relativo considerato.

§ 516. — Le pressioni i cui parametri sono $\Delta X_x, \ldots \Delta Y_z, \ldots$ si possono concepire come sviluppate dal movimento relativo; e conformemente a ciò chiameremo:

$$\int\left\{\Delta X_x \frac{d\,\delta\xi}{dx_0} + \ldots + \Delta Y_z\left(\frac{d\,\delta\eta}{dz_0} + \frac{d\,\delta\zeta}{dy_0}\right) + \ldots\right\}d\tau$$

la potenza delle forze intime " caratteristiche „ del movimento corrispondente ad un atto di movimento virtuale al tempo t.

A questa espressione si può dare la forma:

$$\int\left\{\Delta X_x\,\delta\,\frac{d\xi}{dx_0} + \ldots + \Delta Y_z\,\delta\left(\frac{d\eta}{dz_0} + \frac{d\zeta}{dy_0}\right) + \ldots\right\}d\tau;$$

ossia, posto:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{d\xi}{dx_0}=x_x, \qquad \frac{d\eta}{dy_0}=y_y, \qquad \frac{d\zeta}{dz_0}=z_z\\ \frac{d\eta}{dz_0}+\frac{d\zeta}{dy_0}=y_z=z_y,\\ \frac{d\zeta}{dx_0}+\frac{d\xi}{dz_0}=z_x=x_z,\\ \frac{d\xi}{dy_0}+\frac{d\eta}{dx_0}=x_y=y_x,\end{array}\right\} \quad (1)$$

per modo che $x_x, y_y, z_z, \frac{1}{2}y_z=\frac{1}{2}z_y, \frac{1}{2}z_x=\frac{1}{2}x_z, \frac{1}{2}x_y=\frac{1}{2}y_x$ sono i parametri di dilatazione nel punto (x_0, y_0, z_0) corrispondenti allo spostamento relativo dalla posizione di riferimento alla posizione al tempo t (§ 108):

$$\int \left\{ \Delta X_x \delta x_x + \ldots + \Delta Y_z \delta y_z + \ldots \right\} d\tau.$$

Ne viene che, se, indicando con f una funzione di

$$x_x, \ldots y_z = z_y, \ldots$$

supponiamo:

$$\left.\begin{array}{lll}\Delta X_x=\frac{df}{dx_x}, & \Delta Y_y=\frac{df}{dy_y}, & \Delta Z_z=\frac{df}{dz_z},\\ \Delta Y_z=\frac{df}{dy_z}, & \Delta Z_x=\frac{df}{dz_x}, & \Delta X_y=\frac{df}{dx_y},\end{array}\right\} \quad (2)$$

sarà:

$$\Delta X_x \delta x_x + \ldots + \Delta Y_z \delta y_z + \ldots = df;$$

e poichè (§ 513):

$$\delta \frac{f}{k} = \frac{1}{k}\delta f + f \delta \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\delta f,$$

intesi come movimenti virtuali quelli per cui si verificano le condizioni che permettono le predette semplificazioni, in ultima analisi:

$$\int \left(\Delta X_x \delta x_x + \ldots + \Delta Y_z \delta y_z + \ldots \right) d\tau = \delta \int f\, d\tau; \qquad (4)$$

conformemente alla qual relazione:

$$\int f\,d\tau$$

si chiamerà il " potenziale delle forze intime caratteristiche del movimento rispetto alla posizione di riferimento " e f il " potenziale specifico " o " unitario " corrispondente al punto (x_0, y_0, z_0), o nel punto medesimo. (cfr. §§ 287, 401).

§ 517. — Infine, intendendo che $(X_n)_0$, $(Y_n)_0$, $(Z_n)_0$ si riferiscano al punto qualunque (x_0, y_0, z_0) della superficie del mobile, nell'ipotesi che la sua posizione sia quella di riferimento, e in questa posizione si mantenga in equilibrio relativo alla supposta terna d'assi coordinati, si avrà per le (1, § 398):

$$(X_n)_0 = (X_x)_0 \cos(nx)_0 + (X_y)_0 \cos(ny)_0 + (X_z)_0 \cos(nz)_0$$

e le due analoghe. Sottraendo la qual equazione dalla prima delle stesse (1, § 398), applicata alla posizione corrispondente al tempo qualunque, troviamo, col convenuto grado d'approssimazione, la prima delle tre:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta X_n &= \Delta X_x \cos(nx)_0 + \Delta X_y \cos(ny)_0 + \Delta X_z \cos(nz)_0,\\
\Delta Y_n &= \Delta Y_x \cos(nx)_0 + \Delta Y_y \cos(ny)_0 + \Delta Y_z \cos(nz)_0,\\
\Delta Z_n &= \Delta Z_x \cos(nx)_0 + \Delta Z_y \cos(ny)_0 + \Delta Z_z \cos(nz)_0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Queste sono le così dette " equazioni al contorno "; in confronto delle quali le precedenti (1, § 514) si sogliono chiamare le " equazioni indefinite ".

§ 518. — Constatiamo che, se al complesso dei sistemi di forze e pressioni corrispondenti a $(\Delta \Xi, \Delta \Upsilon, \Delta Z)$ e $(\Delta X_n, \Delta Y_n, \Delta Z_n)$ apparterrà un potenziale W, e hanno luogo le (2, § 516), applicando le (1, § 155) all'atto di movimento effettivo al tempo t — ciò che, salvo il caso di legami dipendenti dal tempo, sarà sempre lecito, perchè nessuna condizione è altrimenti imposta in quella equazione alle δx, δy, δz, che non si concilii con tale ipotesi — e integrando rispetto a t, se ne ricava:

$$T - \left(W + \int f\,d\tau \right) = \textit{Costante};$$

e cioè si verificherà il teorema della conservazione dell'energia (§ 285).

§ 519. — Se in un intervallo di tempo lo spostamento (ξ, η, ζ) manterrà per ogni punto un valore costante, il corpo sarà, nello stesso intervallo di tempo, in equilibrio " rispetto alla posizione di riferimento „. Le equazioni indefinite corrispondenti a questo caso si ricavano senz'altro dalle (1, § 514) col farvi $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$; e allo stesso modo si ricava dall'equazione (1, § 515) la corrispondente che traduce il " teorema delle velocità virtuali „ (cfr. §§ 374, 424). Le equazioni al contorno mantengono la stessa forma.

Secondo la regola generale, una posizione per la quale $W + \int f\, d\tau$, nell'ipotesi del § 516, riceve valor massimo sarà posizione d'equilibrio stabile (cfr. §§ 325, 375).

Movimento elastico.*

§ 520. — " Movimento elastico „ chiameremo un movimento prossimamente rigido di primo ordine, nelle ipotesi che la posizione di riferimento, quando ($\Delta\Xi$, $\Delta\Upsilon$, ΔZ), per ogni punto del mobile, e (ΔX_n, ΔY_n, ΔZ_n), per ogni punto della sua superficie, si mantengono invariabilmente nulle — cioè nulle in ogni posizione ammissibile, almeno entro certi limiti — sia posizione d'equilibrio stabile, conformemente a che si chiamerà anche " posizione normale „: le ΔX_x, ... ΔY_z,... che si chiameranno " parametri d'elasticità „, siano funzioni lineari omogenee dei parametri di dilatazione nel punto corrispondente (x_0, y_0, z_0) (§ 108): si verifichino le (2, § 516), conformemente alle quali esista il potenziale delle forze intime, che si chiamerà " potenziale d'elasticità „. Tali ipotesi, constata l'esperienza, convengono, con sufficiente approssimazione, ai movimenti, direttamente appena percettibili, che percosse, compressioni e trazioni, non eccedenti una certa misura, provocano nei corpi, specialmente

* Esponiamo qui questo argomento nei ristretti limiti che rispondono al nostro scopo, rimandando pel completo sviluppo della teoria ai trattati speciali: e fra questi all'ottimo libro, recentemente uscito, del prof. *E. Cesàro*. — ***Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità***. — Torino, 1894.

solidi. Di questa specie sono le deformazioni, che produce il carico d'un fabbricato ne' suoi membri metallici, e, in generale, le oscillazioni di corde, membrane e lastre, che suscitano la sensazione di *suono*. Mentre la massima parte dei fenomeni luminosi trova la sua coordinazione nell'ipotesi che, in modo analogo, la sensazione di *luce* sia suscitata da tali movimenti d'un mezzo diffuso in tutto lo spazio, — il così detto *etere cosmico*.

Osserviamo come l'ipotesi che i parametri d'elasticità siano funzioni lineari omogenee dei parametri di dilatazione scaturisca, colla convenuta approssimazione, semplicemente da quella che siano funzioni dotate delle derivate parziali prime, finite e continue; poichè, in tale ipotesi, sarà:

$$\Delta X_x = \left(\left(\frac{d \Delta X_x}{d x_x} \right) + \varepsilon_1 \right) x_x + \ldots + \left(\left(\frac{d \Delta X_x}{d y_z} \right)_0 + \varepsilon_4 \right) y_z + \ldots$$

dove le $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_4, \ldots$ svaniscono colle $x_x, \ldots y_z, \ldots$ e sono quindi da reputarsi come estremamente piccole, per valori sufficientemente piccoli delle $x_x, \ldots y_z, \ldots$

Da questa ipotesi segue poi che f, detta il " potenziale elastico specifico „ o " unitario „, relativo al punto (x_0, y_0, z_0), sarà una funzione quadratica dei parametri di dilatazione $x_x, \ldots y_z, \ldots$ relativi allo stesso punto, che, se il termine costante, che si può fissare a piacere, si assume nullo, riesce omogenea. Cioè:

$$\begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 &+ 2a_{12} x_x y_y + 2a_{13} x_x z_z + 2a_{14} x_x y_z + 2a_{15} x_x z_x + 2a_{16} x_x x_y \\ &+ a_{22} y_y^2 \quad + 2a_{23} y_y z_z + 2a_{24} y_y y_z + 2a_{25} y_y z_x + 2a_{26} y_y x_y \\ &\qquad\qquad + a_{33} z_z^2 \quad + \ldots\ldots \end{aligned}$$

I coefficienti a_{11}, a_{12}, ecc. che, nel caso più generale, sommano a 21, s'intendono dipendenti dalla sostanza del corpo elastico considerato, invariabili da punto a punto, se il corpo è dappertutto composto della stessa sostanza in condizioni abbastanza simili; e si chiamano i " coefficienti d' elasticità della sostanza „ o " del corpo „, a che si deve aggiungere " relativi alla terna degli assi cui si riferiscono i coefficienti di dilatazione corrispondenti „. Quando il loro valore risulti indipendente dalla scelta di questa terna, il corpo si dice " isotropo „, e nel caso contrario " anisotropo „ o " cristallino „.

In ogni caso, una restrizione è imposta alle costanti d'elasticità dalla condizione che f non ammetta, per nessun valore delle variabili, un valore positivo. Infatti, concepito che le $(\Delta \Xi, \Delta \Upsilon, \Delta Z)$ e $(\Delta X_n, \Delta Y_n, \Delta Z_n)$ si mantengano invariabilmente nulle in ogni posizione ammissibile del mobile, risulterà, per quanto precede (§ 519), la posizione normale, come s'è supposto, posizione d'equilibrio stabile, ove il potenziale elastico $\int f\,d\tau$ riceva in esso il suo massimo valore, e cioè non riceva, per nessuna posizione possibile del corpo, un valor positivo; poichè, essendo f funzione omogenea, il suo valore per $x_x = \ldots = y_z = \ldots = 0$ è 0. Vogliamo quindi supporlo. E allora, siccome per uno spostamento dislocatorio semplice omogeneo, del quale sia origine la supposta origine delle coordinate, si avrà $\int f\,d\tau = f\tau$, risultando le $x_x, \ldots y_z, \ldots$ invariabili col punto (x_0, y_0, z_0): e, d'altra parte, con questo le $x_x, \ldots y_z, \ldots$ possono sempre ricevere una sestupla di valori arbitrarii — ciò che, notiamo, ha luogo anche imponendo la condizione che la rotazione sia nulla, — vediamo che dovrà essere f negativo o nullo, c. v. d.* Coi termini della teoria delle forme, f dev'essere forma non indefinita, negativa; e le condizioni che debbono perciò soddisfare i coefficienti sono quelle che insegna la medesima teoria.

§ 521. — Con tale espressione di f, le (1, § 514), subordinatamente alle (2, § 516) si traducono in un sistema d'equazioni differenziali alle derivate parziali, dove le ξ, η, ζ fungono da incognite, atte a determinarle in funzione delle variabili indipendenti t e x_0, y_0, z_0, col concorso d'opportune condizioni di spazio e di tempo.

Condizioni di spazio importanti sono quelle che per un punto comunque scelto, per esempio, per l'origine delle coordinate, sia, con qualunque valore di t:

$$\xi = \eta = \zeta = 0, \tag{1}$$

oppure:

$$\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} = 0, \quad \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} = 0; \tag{2}$$

---

* *Kirchhoff. — Mechanik.* 27te Vorles.

delle quali (1) esclude la possibilità d'uno spostamento traslatorio, e (2) quella d'uno spostamento rotatorio, per modo che, prese insieme, escludono ogni movimento rigido.

Altre condizioni egualmente di spazio saranno i valori delle ξ, η, ζ, o dei loro coefficienti differenziali rispetto a x_0, y_0, z_0, nei punti (x_0, y_0, z_0), che formano la superficie del corpo all'origine dei tempi, e per conseguenza ad ogni istante (§ 128); cioè che, per quei punti, quelle siano funzioni date delle coordinate, e, se capita, del tempo.

Coi suddetti coefficienti differenziali, per le equazioni al contorno, risulta data la pressione specifica nei punti della superficie, per ogni valore del tempo. Che se questa si suppone, negli stessi punti, preventivamente data, le equazioni al contorno si traducono in condizioni di spazio, che stabiliscono tre equazioni differenziali speciali per lo spostamento relativo ai punti del contorno.

Fra le condizioni di tempo, vanno ricordate, come fra le più generali, i valori di ξ, η, ζ e di $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, per tutti i posti (x_0, y_0, z_0), ad un istante; cioè la posizione e l'atto di movimento del corpo ad un istante — per esempio, all'origine dei tempi.

§ 522. — Supponiamo le $\Delta\Xi$, $\Delta\Upsilon$, ΔZ, e sulla superficie, le ΔX_n, ΔY_n, ΔZ_n, nulle in ogni posizione possibile del corpo, nella quale ipotesi la posizione normale riesce d'equilibrio stabile: e sia il corpo in movimento. Questo movimento che s'intende sempre rispetto alla posizione normale, si dice " libero ". Le equazioni indefinite risultano:

$$k_0 \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d}{dx_0}\left(\frac{df}{dx_x}\right) + \frac{d}{dy_0}\left(\frac{df}{dx_y}\right) + \frac{d}{dz_0}\left(\frac{df}{dx_z}\right) = 0, \quad (1)$$

ecc.

e le equazioni al contorno:

$$\frac{df}{dx_x}\cos(nx)_0 + \frac{df}{dx_y}\cos(ny)_0 + \frac{df}{dx_z}\cos(nz)_0 = 0, \quad (2)$$

ecc.

Queste equazioni sono lineari, senza termine indipendente dalle incognite; e da ciò segue la proprietà, di cui si fa molte-

plice uso, che se ξ_1, ξ_2 indicano due diverse soluzioni, sarà una soluzione anche $C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2$, dove C_1, C_2 sono costanti quali si vogliano.

Coll'aiuto di questa proprietà, riconosciamo agevolmente come il movimento, nelle ipotesi in discorso, sarà univocamente determinato mediante le precedenti equazioni, col concorso della posizione e dell'atto di movimento ad un istante qualunque, che diremo l'istante iniziale: cioè come, supposto che un movimento corrisponda a questo complesso di circostanze, non potrà esservene un altro, diverso da esso, che egualmente vi corrisponda.

Basta perciò dimostrare che, se ξ_1, η_1, ζ_1 e ξ_2, η_2, ζ_2 si suppongono due soluzioni che soddisfanno a tutte le circostanze in discorso, sarà necessariamente

$$\xi_1 - \xi_2 = 0, \qquad \eta_1 - \eta_2 = 0, \qquad \zeta_1 - \zeta_2 = 0.$$

E questo si deduce dal fatto che

$$\xi' = \xi_1 - \xi_2, \qquad \eta' = \eta_1 - \eta_2, \qquad \zeta' = \zeta_1 - \zeta_2$$

soddisfaranno alle equazioni indefinite e al contorno, per modo da corrispondere ad una forma di movimento della specie considerata; e, d'altra parte, risultando, all'istante iniziale, $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$, $\frac{d\xi'}{dt} = \frac{d\eta'}{dt} = \frac{d\zeta'}{dt} = 0$, con che, al medesimo istante, la posizione sarà la normale, e l'atto di movimento nullo, lo spostamento, per essere la posizione normale d'equilibrio stabile, sarà costantemente nullo; cioè, ad ogni istante, $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$, c. v. d.

§ 523. — Supponiamo, più generalmente, che le $(\Delta \Xi, \Delta \Upsilon, \Delta Z)$, $(\Delta X_n, \Delta Y_n, \Delta Z_n)$ mantengano, in ogni posizione possibile del corpo, nei singoli punti, un valore costante. Il sistema potrà, nel supposto intervallo di tempo, mantenersi in equilibrio; e, per determinare il relativo spostamento (ξ, η, ζ) d'ogni punto, abbiamo le equazioni indefinite:

$$\Delta \Xi + \frac{d}{dx_0}\left(\frac{df}{dx_x}\right) + \frac{d}{dy_0}\left(\frac{df}{dx_y}\right) + \frac{d}{dz_0}\left(\frac{df}{dx_z}\right) = 0, \qquad (1)$$

ecc.

e le equazioni al contorno:

$$\Delta X_n - \frac{df}{dx_x}\cos(nx)_0 - \frac{df}{dx_y}\cos(ny)_0 - \frac{df}{dx_z}\cos(nz)_0 = 0. \quad (2)$$

Ora, se, oltre la precedente ipotesi sulla funzione f, si suppone che non possa ricevere il valor zero per alcuna sestupla di valori delle $x_x \ldots y_z \ldots$ all'infuori di quella formata dal valor zero di tutte le variabili — con che f risulta una " forma definita negativa „ — è facile riconoscere che le precedenti sei equazioni, col concorso delle (2, § 516), (1, § 516), determinano una soluzione (ξ, η, ζ) univocamente.

Difatti, concepite due soluzioni ξ_1, η_1, ζ_1 e ξ_2, η_2, ζ_2, poniamo $\xi' = \xi_1 - \xi_2$, $\eta' = \eta_1 - \eta_2$, $\zeta' = \zeta_1 - \zeta_2$, e indichiamo con $x'_x, \ldots y'_z, \ldots$ i valori di $x_x, \ldots y_z, \ldots$ corrispondenti, e con f' il risultato della sostituzione di $x'_x, \ldots y'_z, \ldots$ a $x_x, \ldots y_z, \ldots$ in f. Avremo, in conseguenza delle (1) e (2), poichè le derivate di f rispetto alle $x_x, \ldots y_z, \ldots$ sono funzioni lineari di queste variabili:

$$\frac{d}{dx_0}\left(\frac{df'}{dx'_x}\right) + \frac{d}{dy_0}\left(\frac{df'}{dx'_y}\right) + \frac{d}{dz_0}\left(\frac{df'}{dx'_z}\right) = 0,$$

ecc.

$$\frac{df'}{dx'_x}\cos(nx)_0 + \frac{df'}{dx'_y}\cos(ny)_0 + \frac{df'}{dx'_z}\cos(nz)_0 = 0;$$

ecc.

conformemente alle quali, pei §§ 515, 519, si ha:

$$\int f'\,d\tau = 0.$$

Di qui, poichè f' è invariabile di segno, segue, alla sua volta, $f' = 0$; e per l'aggiunta condizione, in ultima analisi, $x'_x = \ldots = y'_z = \ldots = 0$. Per questo risultato, (ξ', η', ζ') rappresenterà uno spostamento rigido (cfr. § 165); cioè le due posizioni corrispondenti a ξ_1, η_1, ζ_1 e ξ_2, η_2, ζ_2 si ridurranno l'una all'altra con uno spostamento rigido. Se poi si aggiungono le (1, § 521), (2, § 521), conformemente alle quali questo spostamento si riduce a zero, si conclude che sarà $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$, e le due soluzioni ξ_1, η_1, ζ_1 e ξ_2, η_2, ζ_2 coincidenti, c. v. d.

§ 524. — Per la ragione che emerge dalla precedente esposizione, la f si supporrà d'ora in avanti una forma definita negativa.

§ 525. — Nella stessa ipotesi del § 523 che le $(\Delta \Xi, \Delta Y, \Delta Z)$, $(\Delta X_n, \Delta Y_n, \Delta Z_n)$ mantengano, in ogni punto, un valore costante, indichiamo con $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ la soluzione che conviene all'equilibrio, e poniamo $\xi = \bar{\xi} + \xi'$, $\eta = \bar{\eta} + \eta'$, $\zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$. Poichè le $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ soddisfanno le (1), (2) del § 523, le ξ', η', ζ' soddisfaranno le (1), (2) del § 522. E con ciò il problema nell'ipotesi in discorso si scinde in due distinti, che richiedono rispettivamente l'integrazione delle (1, 2, § 523), e delle (1, 2, § 522). Queste ultime determineranno univocamente ξ', η', ζ', se saranno dati ad un istante i valori delle stesse variabili e di $\frac{d\xi'}{dt}$, $\frac{d\eta'}{dt}$, $\frac{d\zeta'}{dt}$ (§ 522). D'altra parte, si ha $\xi' = \xi - \bar{\xi}$, $\frac{d\xi'}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$ e le analoghe. Quindi le ξ, η, ζ saranno univocamente determinate dalle

$$k_0 \frac{d^2\xi}{dt^2} - k_0 \Delta \Xi + \frac{d}{dx_0}\left(\frac{df}{dx_x}\right) + \frac{d}{dy_0}\left(\frac{df}{dx_y}\right) + \frac{d}{dz_0}\left(\frac{df}{dx_z}\right) = 0,$$

ecc.

$$\Delta X_n - \frac{df}{dx_x}\cos(nx)_0 - \frac{df}{dx_y}\cos(ny)_0 - \frac{df}{dx_z}\cos(nz)_0 = 0,$$

ecc.

dati inoltre ad un istante il loro valore e quello di $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$; cioè la posizione e l'atto di movimento del corpo, come nel caso del movimento libero precedentemente considerato.

Il movimento definito da (ξ', η', ζ') si dice " movimento intorno alla posizione d'equilibrio corrispondente alle supposte forze limite e pressioni prestabilite „. Si vede che esso è retto dalle stesse equazioni differenziali a cui soddisfa il movimento libero intorno alla posizione normale; ciò che si esprime talvolta col dire che il corpo, intorno alla supposta posizione di equilibrio, si move " come se fosse libero „.

Corpi elastici isotropi.

§ 526. - I parametri d'elasticità, conformemente alla teoria generale (§§ 401 e 520), definiscono pel punto cui si riferiscono la ***pressione relativa ad ogni raggio***, che si chiama, nel caso in discorso, " pressione elastica ". Analogamente le direzioni principali di pressione, e le pressioni principali corrispondenti si chiamano le " direzioni principali di pressione elastica " e anche semplicemente " d' elasticità " e le " pressioni principali elastiche ", relative al punto. Ciò premesso, un' ipotesi speciale, che si presenta spontaneamente, è quella che, per ogni punto, qualunque sia il movimento elastico considerato, le direzioni principali d'elasticità coincidano colle direzioni principali di dilatazione, e scambiando i coefficienti di dilatazione principali relativi a due di queste, si scambino le pressioni elastiche principali corrispondenti. S' intende che, d'altronde, si manterranno le proprietà ammesse in generale; salvo verificare se si conciliano con queste particolari circostanze.

Con ciò, indicando con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e p_1, p_2, p_3 i coefficienti di dilatazione principali, e le pressioni elastiche principali relativi al punto qualunque (x_0, y_0, z_0), porremo:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -2K(\lambda_1 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)), \\ p_2 &= -2K(\lambda_2 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)), \\ p_3 &= -2K(\lambda_3 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dove K e θ rappresentano due costanti.

Così, assumendo come assi di riferimento, per definire i parametri d'elasticità e di dilatazione relativi al punto considerato, la terna degli assi principali, ad un tempo, di dilatazione e di elasticità, si ha:

$$f = -K(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2), \qquad (2)$$

perchè, in tale ipotesi, è

$$X_x = p_1, \ldots \; Y_z = 0, \ldots \; x_x = \lambda_1, \ldots y_z = 0, \ldots$$

D'altra parte, intesi $x_x, \ldots y_z, \ldots$ riferiti ad una terna qualsivoglia, λ_1, λ_2, λ_3 (cfr. §§ 108, 97) saranno le radici di

$$\begin{vmatrix} x_x - \lambda & \frac{1}{2} x_y & \frac{1}{2} x_z \\ \frac{1}{2} y_x & y_y - \lambda & \frac{1}{2} y_z \\ \frac{1}{2} z_x & \frac{1}{2} z_y & z_z - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

con

$$y_z = z_y\,, \qquad z_x = x_z\,, \qquad x_y = y_x\,.$$

Quindi, per le note relazioni fra coefficienti e radici:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_x + y_y + z_z, \tag{3}$$

$$\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y - \frac{1}{4} y_z^2 - \frac{1}{4} z_x^2 - \frac{1}{4} x_y^2,$$

donde segue:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} y_z^2 + \frac{1}{2} z_x^2 + \frac{1}{2} x_y^2. \tag{4}$$

Si conclude:

$$f = - K\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} y_z^2 + \frac{1}{2} z_x^2 + \frac{1}{2} x_y^2 + \theta\,(x_x + y_y + z_z)^2\right), \tag{5}$$

espressione del potenziale specifico relativo al punto qualsivoglia nel caso considerato. E poichè, per (3) e (4), i coefficienti non cambiano col mutare la terna degli assi coordinati cui si riferiscono i parametri di dilatazione e di pressione elastica, si rileva che l'ipotesi speciale in discorso trae con sè che il corpo è isotropo (§ 520).

§ 527. — Poniamo ora *a priori* l'ipotesi che il corpo sia isotropo, e cerchiamo la corrispondente forma di f.

Concepita una certa terna d'assi coordinati, il piano xy si dirà un " piano di simmetria " del corpo, quando le costanti di elasticità non cambiino sostituendo alla terna quella che ne differisce puramente pel senso dell'asse delle z. Ora, per tal cambiamento degli assi, x e y, ξ e η restano invariati, e cambiano

di segno z e ζ: quindi restano invariati x_x, y_y, z_z e z_y e cambiano di segno y_z e z_x. Donde segue che, per la suddetta proprietà, è necessario e sufficiente che siano nulli

$$\begin{array}{cccc} a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{46}, \\ a_{15}, & a_{25}, & a_{35}, & a_{56}. \end{array}$$

Supponiamo che, conformemente alla stessa definizione, sia un piano di simmetria, oltre il piano xy, anche il piano yz. Perciò sarà necessario e sufficiente che siano nulli anche

$$a_{16}, \quad a_{26}, \quad a_{36}.$$

Sarà così:

$$f = a_{11} x_x^2 + a_{22} y_y^2 + a_{33} z_z^2 + a_{44} y_z^2 + a_{55} z_x^2 + a_{66} x_y^2$$
$$+ 2 a_{23} y_y z_z + 2 a_{31} z_z x_x + 2 a_{12} x_x y_y.$$

E da questa forma di f apparisce che anche il piano xz sarà piano di simmetria.

Supposti i piani xy e yz piani di simmetria, essi si diranno " equivalenti ", se f conserverà la propria forma mutando la supposta terna in un'altra che ne differisca puramente per lo scambio degli assi delle x e delle z. Siccome con ciò si scambiano fra loro x_x e z_z, y_z e x_y, mentre le variabili rimanenti restano inalterate, si vede che perciò è necessario e sufficiente che sia:

$$a_{11} = a_{33}, \quad a_{44} = a_{66}, \quad a_{23} = a_{12}.$$

Quindi, se i tre piani coordinati sono piani di simmetria equivalenti:

$$f = a_{11} (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2 a_{12} (y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y)$$
$$+ a_{44} (y_z^2 + z_x^2 + x_y^2).$$

Supposto il corpo isotropo, deve sussistere, qualunque sia la terna degli assi coordinati, questa espressione, *collo stesso valore dei coefficienti*; o, scrivendo diversamente, dev'essere:

$$f = - K \left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} y_z^2 + \frac{1}{2} z_x^2 + \frac{1}{2} x_y^2 + \theta (x_x + y_y + z_z)^2\right)$$
$$+ L (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2),$$

qualunque sia la supposta terna degli assi coordinati, con valori invariabili di K, θ e L.

Ora, per le (3) e (4) del § precedente, a questa condizione soddisfa la prima linea; mentre $x_x^2 + y_y^2 + z_z^2$ non si cambia parimente, col mutar gli assi, nell'espressione analoga relativa ai nuovi assi, che potremo indicare con $x'^2_{x'} + y'^2_{y'} + z'^2_{z'}$. Donde si conclude che condizione necessaria e sufficiente perchè il corpo sia isotropo sarà che stia la precedente espressione con $L = 0$: con che si ottiene la (5), la quale risulta così la forma generale del potenziale specifico d'un corpo isotropo.

§ 528. — Da questa forma, che abbiamo veduto nel precedente § 526 come si deduca dalla semplice relazione fra i parametri di pressione elastica e di dilatazione stabilita in principio, scaturisce poi, reciprocamente, la relazione medesima. Poichè, assumendo per assi coordinati gli assi principali di dilatazione, essa si riduce a (2, § 526), donde si ha $X_x = p_1$, $Y_y = p_2$, $Z_z = p_3$, conformemente alle (1, § 526), oltre di che $Y_z = Z_y = X_y = 0$, per le quali gli assi stessi sono anche gli assi principali d'elasticità.

Si conclude quindi l'importante proposizione che "sono equivalenti le ipotesi che il corpo sia isotropo, e quella che coincidano in ogni punto gli assi principali di dilatazione e d'elasticità, e si scambino insieme due coefficienti di dilatazione principali, e le pressioni principali corrispondenti ".

§ 529. — Le costanti K e θ potranno ricevere un valore qualunque, purchè risultino soddisfatte le condizioni occorrenti perchè f sia forma definita negativa (§ 520, § 524). Queste, nel caso attuale, si possono stabilire col seguente elegante procedimento.*

Poniamo:

$$\varkappa = x_x + y_y + z_z,$$
$$x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \theta \varkappa^2 = (x_x - \rho \varkappa)^2 + (y_y - \rho \varkappa)^2 + (z_z - \rho \varkappa)^2,$$

per modo che riesca:

$$f = - K\left((x_x - \rho \varkappa)^2 + (y_y - \rho \varkappa)^2 + (z_z - \rho \varkappa)^2 + \frac{1}{2} y_z^2 + \frac{1}{2} z_y^2 + \frac{1}{2} x_y^2\right).$$

* V. *Beltrami.* — *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici.* — *Rendiconti del R. Istituto Lombardo,* 1885.

Le due poste relazioni forniscono immediatamente:

$$\theta = 3\rho^2 - 2\rho, \qquad 3\rho = 1 \pm \sqrt{1 + 3\theta}.$$

E con ciò condizioni sufficienti perchè f sia definitiva negativa riescono:

$$K > 0, \qquad 1 + 3\theta > 0.$$

Mentre, d'altra parte, si riconosce senz'altro che queste condizioni sono necessarie, facendo l'ipotesi che sia $x_x + y_y + z_z = 0$, col valore di qualcuna delle variabili diverso da 0, ciò che fornisce per f il prodotto di $-K$ per un numero positivo, e quella che sia $x_x = y_y = z_z = a$ con $y_z = z_x = x_y = 0$, per cui:

$$f = -3Ka^2(1 + 3\theta).$$

§ 530. — Colla trovata espressione di f si ha senz'altro, conformemente alle (2, § 516):

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta X_x = -2K(x_x + \theta x), & \Delta Y_y = -2K(y_y + \theta x), & \Delta Z_z = -2K(z_z + \theta x), \\ \Delta Y_z = -Ky_z, & \Delta Z_x = -Kz_x, & \Delta X_y = -Kx_y. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Le equazioni indefinite del movimento, ommettendo, per brevità di scrittura, l'indice o, risultano, in seguito ad ovvie riduzioni:

$$k\frac{d^2\xi}{dt^2} = k\,\Delta\Xi + K\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} + (1 + 2\theta)\frac{dx}{dx}\right),$$

$$k\frac{d^2\eta}{dt^2} = k\,\Delta\Upsilon + K\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2} + (1 + 2\theta)\frac{dx}{dy}\right),$$

$$k\frac{d^2\zeta}{dt^2} = k\,\Delta Z + K\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2} + (1 + 2\theta)\frac{dx}{dz}\right);$$

ossia, poichè si ha:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} - \frac{dx}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right),$$

le analoghe:

$$k\frac{d^2\xi}{dt^2} = k\,\Delta\Xi + 2K\left(\frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy} + (1 + \theta)\frac{dx}{dx}\right),$$

$$k\frac{d^2\eta}{dt^2} = k\,\Delta\Upsilon + 2K\left(\frac{dr}{dx} - \frac{dp}{dz} + (1 + \theta)\frac{dx}{dy}\right),$$

$$k\frac{d^2\zeta}{dt^2} = k\,\Delta Z + 2K\left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + (1 + \theta)\frac{dx}{dz}\right),$$

dove (§ 108):

$$2p = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}, \quad 2q = \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}, \quad 2r = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}.$$

Infine, le equazioni al contorno, ommettendovi pure l'indice zero, risultano, mediante semplicissime trasformazioni:

$$\Delta X_n + 2K\left(\frac{d\xi}{dn} + \theta\varkappa \cos(nx) + r\cos(ny) - q\cos(nz)\right) = 0,$$

$$\Delta Y_n + 2K\left(\frac{d\eta}{dn} + \theta\varkappa \cos(ny) + p\cos(nz) - r\cos(nx)\right) = 0,$$

$$\Delta Z_n + 2K\left(\frac{d\zeta}{dn} + \theta\varkappa \cos(nz) + q\cos(nx) - p\cos(ny)\right) = 0.$$

§ 531. — Le costanti K e θ hanno un significato meccanico assai semplice. Concepiamo il corpo in equilibrio nell'ipotesi che sia $\Delta\Xi = \Delta\Upsilon = \Delta Z = 0$.

Le equazioni indefinite sono soddisfatte da:

$$\Delta X_x = \Delta Y_y = \Delta Z_z = \pi, \qquad \Delta Y_z = \Delta Z_x = \Delta X_y = 0,$$

dove π è costante; conformemente alla quale ipotesi, le equazioni al contorno mostrano che la pressione specifica nei punti della superficie avrà la grandezza costante $|\pi|$, e la direzione della normale alla superficie nel punto, volta verso l'interno del corpo o all'infuori secondo che π è positivo o negativo. D'altra parte, con ciò, si ha per le (1, § 530):

$$x_x = y_y = z_z = \frac{1}{3}\varkappa; \qquad y_z = z_x = x_y = 0;$$

$$-\frac{\varkappa}{\pi} = \frac{3}{2K(1+3\theta)}.$$

Il rapporto $-\frac{\varkappa}{\pi}$ si chiama il " coefficiente di comprimibilità cubica "; e si vede la relazione che lega con esso K e θ.

Le stesse equazioni indefinite sono soddisfatte da:

$$\Delta X_x = \Delta Y_y = \Delta Y_z = \Delta Z_x = 0, \qquad \Delta Z_z = \rho,$$

dove ρ è costante; colla quale ipotesi, per le equazioni al contorno, la pressione specifica in ogni punto della superficie risulta di

grandezza $|\rho \cos(n z)|$, e parallela all'asse delle z, col senso dello stesso asse o l'opposto secondo che $\rho \cos(n z)$ è positivo o negativo, mentre per le (1, § 530):

$$x_x = y_y = -\theta x, \quad z_z = (1 + 2\theta)\, x, \quad y_z = z_x = x_y = 0;$$

$$-\frac{z_z}{\rho} = \frac{1 + 2\theta}{2K(1 + 3\theta)}.$$

Chiameremo il rapporto $-\frac{z_z}{\rho}$ " coefficiente di comprimibilità lineare ", altra costante specifica del corpo, legata dalle precedenti relazioni colle K, θ.

Indicando i due coefficienti di comprimibilità, cubica e lineare, con $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, dalle due relazioni si ricava:

$$K = \frac{3}{9\mathfrak{b} - 2\mathfrak{a}}, \qquad \theta = \frac{3\mathfrak{b} - \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}},$$

colle quali la determinazione di K, θ è ridotta a quella di $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.

Un altro significato meccanico delle stesse costanti d'elasticità emergerà dall'argomento che segue.

Onde elastiche piane.

§ 532. — Per dare un esempio, ed esporre ad un tempo i principii della teoria del movimento ondulatorio, ch'è fra le più ricche d'applicazioni, integreremo le equazioni del movimento elastico (1, § 522), che, ommettendo, per brevità, l'indice zero, scriveremo:

$$k \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d}{dx} \frac{df}{dx_x} + \frac{d}{dy} \frac{df}{dx_y} + \frac{d}{dz} \frac{df}{dx_z} = 0, \qquad (1)$$

ecc.

nel caso delle così dette " onde piane ", colle ipotesi più generali e il metodo di *Beltrami.* *

---

* V. *Beltrami.* — *Sulla teoria generale delle onde piane* nei *Rendic. del Circolo Matematico di Palermo,* tomo V.

Supponiamo perciò il mezzo così esteso da potersi sensibilmente considerare come infinito, e stabiliamo *a priori*, salvo verificare l'ammissibilità dell'ipotesi:

$$\xi = \xi\,(s, t), \qquad \eta = \eta\,(s, t), \qquad \zeta = \zeta\,(s, t), \tag{2}$$

$$s = l\,x + m\,y + n\,z, \tag{2'}$$

così rappresentando tre funzioni di s e di t, e intendendo che l, m, n dinotino tre costanti, assoggettate alla condizione,

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

per modo che, ad ogni istante, abbiano lo stesso spostamento tutti i punti che, nella posizione di riferimento, appartengono ad un piano di direzione fissata; cioè sopra ogni piano la cui equazione è (2)', ossia la cui normale ha per coseni di direzione l, m, n, e fra i piani che soddisfanno a questa condizione è distinto dalla misura s della sua distanza dall'origine delle coordinate, positiva o negativa secondo che il piano si trova dalla parte verso cui volge la normale (l, m, n) o dalla parte opposta.

In conseguenza delle (2), (2)' si avrà per ξ, η ζ, e per ogni funzione di esse:

$$\frac{d}{dx} = l\,\frac{d}{ds}, \qquad \frac{d}{dy} = m\,\frac{d}{ds}, \qquad \frac{d}{dz} = n\,\frac{d}{ds}.$$

Di qui, in primo luogo:

$$x_x = l\,\xi_1, \qquad y_z = z_y = m\,\zeta_1 + n\,\eta_1,$$

e le analoghe, dove:

$$\xi_1 = \frac{d\,\xi}{d\,s}, \qquad \eta_1 = \frac{d\,\eta}{d\,s}, \qquad \zeta_1 = \frac{d\,\zeta}{d\,s}.$$

Collegando queste relazioni, dalle quali segue:

$$\frac{df}{d\xi_1} = \frac{df}{d\,x_x}\,l + \frac{df}{d\,x_y}\,m + \frac{df}{d\,x_z}\,n, \tag{3}$$

colle precedenti, si trova subito:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{df}{d\,x_x} + \frac{d}{dy}\,\frac{df}{d\,x_y} + \frac{d}{dz}\,\frac{df}{d\,x_z} = \frac{d}{ds}\,\frac{df}{d\xi_1}.$$

Quindi le (2), (2)′ sono conciliabili colle (1), che in questa ipotesi si riducono alla forma semplicissima:

$$k\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d}{ds}\frac{df}{d\xi_1}=0,\quad k\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d}{ds}\frac{df}{d\eta_1}=0,\quad k\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{d}{ds}\frac{df}{d\zeta_1}=0, \qquad (4)$$

dove giova anche notare che per (3), il vettore

$$\left(\frac{df}{d\xi_1},\ \frac{df}{d\eta_1},\ \frac{df}{d\zeta_1}\right)$$

altro non è che la pressione specifica nel punto considerato relativa alla normale (l, m, n) al piano (2)′.

Da queste equazioni segue, indicando con α, β, γ tre costanti quali si vogliano:

$$k\frac{d^2(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)}{dt}+\frac{d}{ds}\left(\alpha\frac{df}{d\xi_1}+\beta\frac{df}{d\eta_1}+\gamma\frac{df}{d\zeta_1}\right)=0, \qquad (5)$$

e una terna d'equazioni che si deduca di qui attribuendo ad α, β, γ tre terne di valori il cui determinante non sia zero sarà equivalente alla precedente.

Ora, posto:

$$x'_x = l\alpha, \qquad y'_z = z'_y = m\gamma + n\beta,$$

e le relazioni analoghe, e indicata con f' la funzione di α, β, γ che si ottiene sostituendo $x'_x, \ldots y'_z, \ldots$ a $x_x, \ldots y_z, \ldots$ in f, si trova subito, e d'altronde è notissima proprietà delle forme quadratiche, che si ha:

$$\alpha\frac{df}{d\xi_1}+\beta\frac{df}{d\eta_1}+\gamma\frac{df}{d\zeta_1}=\xi_1\frac{df'}{d\alpha}+\eta_1\frac{df'}{d\beta}+\zeta_1\frac{df'}{d\gamma}$$
$$=\frac{d}{ds}\left(\xi\frac{df'}{d\alpha}+\eta\frac{df'}{d\beta}+\zeta\frac{df'}{d\gamma}\right);$$

per modo che la (5) può porsi sotto la forma:

$$k\frac{d^2(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)}{dt^2}+\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{df'}{d\alpha}\xi+\frac{df'}{d\beta}\eta+\frac{df'}{d\gamma}\zeta\right)=0. \qquad (6)$$

Poniamo, indicando con λ un parametro da determinarsi opportunamente:

$$\frac{df'}{d\alpha}=-\lambda\alpha, \qquad \frac{df'}{d\beta}=-\lambda\beta, \qquad \frac{df'}{d\gamma}=-\lambda\gamma; \qquad (7)$$

vale a dire, rammentando come f' è composta:

$$\left.\begin{array}{l}(A_{11}-\lambda)\alpha+A_{12}\beta+A_{13}\gamma=0,\\ A_{12}\alpha+(A_{22}-\lambda)\beta+A_{23}\gamma=0,\\ A_{13}\alpha+A_{23}\beta+(A_{33}-\lambda)\gamma=0,\end{array}\right\} \qquad (7)'$$

dove le A_{11}, A_{12}, ecc., sono funzioni lineari di l, m, n e dei coefficienti di f. Inoltre stabiliamo che sia

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Si suppone f negativa; quindi, con ρ reale, si può porre:

$$\frac{1}{\rho^2}+f'=0;$$

la quale, inteso che α, β, γ e ρ siano i coseni di direzione e la grandezza d'un raggio spiccato dall'origine degli assi coordinati, sarà l'equazione d'un ellissoide, luogo del termine del raggio vettore medesimo. E allora, per quanto sappiamo (§ 50), le poste relazioni sono soddisfatte da tre valori positivi (generalmente distinti) di λ, a ciascun dei quali corrisponde una terna di valori di α, β, γ, e le tre terne rappresentano i coseni di direzione di tre assi fra loro ortogonali.

Perciò, fra l'altre proprietà, il determinante delle tre terne (α, β, γ) è 1, così che, sostituite successivamente nella (5), forniscono una terna d'equazioni differenziali equivalente a (3).

Poniamo altresì $\frac{\lambda}{k}=a^2$, donde per ogni valore di λ risulta un valore reale di $\pm a$.

Con ciò, la (6), in base alle (7) si riduce a:

$$\frac{d^2(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)}{dt^2}=a^2\frac{d^2(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)}{ds^2}, \qquad (8)$$

che va intesa scritta per ciascuno dei tre valori di a^2, o di $\pm a$, e corrispondenti valori di α, β, γ.

L'equazione:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=a^2\frac{d^2\sigma}{ds^2},$$

posto, per un momento:

$$s - at = x, \qquad s + at = y,$$

si trasforma immediatamente in

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,dy} = 0,$$

Di qui si ha direttamente:

$$\sigma = \varphi(x) + \chi(y),$$

dove $\varphi(x)$, $\chi(y)$ sono simboli di funzioni arbitrarie. E perciò l'integrale generale della suddetta equazione è

$$\sigma = \varphi(s - at) + \chi(s + at).$$

Ne viene, per (8), con questo significato di σ:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = \sigma;$$

ossia, distinguendo cogli indici 1, 2, 3 i tre valori di a e i corrispondenti valori di α, β, γ:

$$\alpha_i\xi + \beta_i\eta + \gamma_i\zeta = \sigma_i,$$
$$\sigma_i = \varphi_i(s - a_i t) + \chi_i(s + a_i t),$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

tre equazioni lineari in ξ, η, ζ, donde finalmente si ricava:

$$\xi = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3,$$
$$\eta = \beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 + \beta_3\sigma_3,$$
$$\zeta = \gamma_1\sigma_1 + \gamma_2\sigma_2 + \gamma_3\sigma_3,$$

che sono le formole di risoluzione del problema.

§ 533. — Così, lo spostamento dei singoli punti ad ogni istante risulta composto dei tre $(\alpha_i\sigma_i, \beta_i\sigma_i, \gamma_i\sigma_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ le cui direzioni sono invariabili e fra loro ortogonali: ossia il movimento considerato composto dei tre corrispondenti agli spostamenti medesimi, la posizione comune di riferimento essendo la posizione normale del mezzo (§ 119).

Ciascuno di questi movimenti, essendo invariabile la direzione dello spostamento, è rettilineo Alla sua volta poi risulta

composto di due, aventi lo stesso asse $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, e misure rappresentate da $\varphi_i(s - a_i t)$, $\chi_i(s + a_i t)$. Queste funzioni prendono lo stesso valore per due diverse coppie (s, t) e (s', t') di valori delle variabili che soddisfacciano rispettivamente a

$$s' - s = a_i(t' - t), \qquad s' - s = - a_i(t' - t).$$

Quindi, immaginata nella posizione normale del mezzo la successione dei piani aventi la supposta direzione, che sono distinti dalla misura s (o s') della perpendicolare descritta ad essi dall'origine, per ciascuno dei due movimenti in discorso, lo spostamento che ad un istante appartiene ad uno qualunque, appartiene ad un istante diverso ad un altro: e precisamente al piano la cui distanza da esso ha per grandezza il prodotto di a_i per la grandezza dell'intervallo di tempo compreso fra i due istanti, da una parte o dall'altra secondo che è l'uno o l'altro dei due movimenti medesimi. Ciò si esprime dicendo che, per ciascun movimento, ogni spostamento del mezzo " si propaga " nella successione dei piani colla " velocità di propagazione " a_i, in un senso o nell'altro: e il movimento, per la sua analogia con quella delle onde alla superficie d'un liquido, si chiama " ondulatorio ", ogni piano della successione dicendosi un " piano d'onda ".

La trajettoria dei punti, nei tre movimenti componenti, ha rispetto al piano d'onda tre inclinazioni diverse, fra loro perpendicolari, alle quali corrispondono tre diverse velocità di propagazione. Nel caso che sia perpendicolare, il movimento ondulatorio si dice " longitudinale ", e " trasversale ", in quello che sia parallela. Si vede che se uno dei tre movimenti ondulatorii componenti è longitudinale, gli altri due saranno trasversali.

§ 534. — Particolarmente interessante è il caso d'un mezzo isotropo. Assumendo la relativa forma di f (§ 526), si ottiene direttamente per equazioni (7, § 532):

$$\left.\begin{aligned} (l^2 - \mu)\,\alpha + lm\,\beta + ln\,\gamma &= 0, \\ ml\,\alpha + (m^2 - \mu)\,\beta + mn\,\gamma &= 0, \\ nl\,\alpha + nm\,\beta + (n^2 - \mu)\,\gamma &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

dove:

$$\mu = \frac{\lambda - K}{K(1 + 2\eta)}. \tag{2}$$

Si ha quindi per determinare λ mediante μ:

$$\begin{vmatrix} l^2-\mu & lm & ln \\ ml & m^2-\mu & mn \\ nl & nm & n^2-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

ossia, sviluppando, semplicemente:

$$\mu^2(\mu-1)=0.$$

Ne viene, per (2):

$$\lambda = K, \qquad \lambda = 2(1+\theta)K,$$

il primo dei quali valori rappresenta una radice doppia. E per le (1), col primo valore ($\mu=0$), qualunque equazione si prenda:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0:$$

col secondo, invece:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n} = l\alpha + m\beta + n\gamma.$$

Per conseguenza, *qualunque sia la direzione del piano d'onda*, il movimento si compone di due movimenti ondulatorii, l'uno trasversale e l'altro longitudinale, le cui velocità di propagazione risultano avere per misura $\sqrt{\frac{K}{k}}$ e $\sqrt{\frac{2(1+\theta)K}{k}}$, per modo che il rapporto della seconda alla prima è $\sqrt{2(1+\theta)}$. E la direzione dello spostamento nel moto trasversale può essere quella d'una parallela al piano d'onda quale si voglia.

§ 535. — A determinare le funzioni arbitrarie serviranno le condizioni di tempo e di spazio particolari delle diverse questioni.

Il mezzo è implicitamente supposto illimitato secondo ogni parallela ai piani d'onda.

Supponiamolo illimitato anche secondo la perpendicolare, d'ambe le parti, per modo che s riceva tutti i valori possibili, e in questa ipotesi sia:

$$-\infty < s < \infty, \quad t=0 \left\{ \begin{aligned} &\frac{\xi}{\alpha} = \frac{\eta}{\beta} = \frac{\zeta}{\gamma} = f(s), \\ &\frac{\frac{d\xi}{dt}}{\alpha} = \frac{\frac{d\eta}{dt}}{\beta} = \frac{\frac{d\zeta}{dt}}{\gamma} = ag'(s), \end{aligned} \right. \tag{1}$$

dove l'apice indica la derivata rispetto ad s.

Segue di qui:

$$\varphi(s) + \chi(s) = f(s), \qquad -\varphi'(s) + \chi'(s) = g'(s),$$

dalla seconda delle quali:

$$\varphi(s) - \chi(s) = -g(s).$$

Quindi:

$$\varphi(s) = \frac{f(s) - g(s)}{2}, \quad \chi(s) = \frac{f(s) + g(s)}{2}; \qquad (2)$$

e poichè l'insieme dei valori di s pei quali $f(s)$ e $g(s)$ sono date è lo stesso che quello dei valori che ricevono $s - at$ e $s + at$ al variare di s e di t tra $-\infty$ e ∞, finalmente:

$$\varphi(s - at) = \frac{f(s - at) - g(s - at)}{2}, \; \chi(s + at) = \frac{f(s + at) + g(s + at)}{2}, \quad (3)$$

§ 536. — Supponiamo invece il mezzo limitato da un piano fisso parallelo ai piani d'onda, per modo che la successione dei piani d'onda (assunto per detto piano $s = 0$, e inteso s positivo dalla parte del mezzo) corrisponda a s compreso fra 0 e ∞. E in questa ipotesi stiano le condizioni:

$$0 \overline{<} s < \infty, \quad t = 0 \begin{cases} \dfrac{\xi}{\alpha} = \dfrac{\eta}{\beta} = \dfrac{\zeta}{\gamma} = f(s), \\[2ex] \dfrac{\frac{d\xi}{dt}}{\alpha} = \dfrac{\frac{d\eta}{dt}}{\beta} = \dfrac{\frac{d\zeta}{dt}}{\gamma} = a g'(s), \end{cases} \qquad (1)$$

$$s = 0, \quad -\infty < t < \infty: \; \xi = \eta = \zeta = 0, \qquad (2)$$

la prima, condizione di tempo, e la seconda, di spazio.

Quest'ultima condizione si traduce immediatamente in

$$\varphi(-at) + \chi(at) = 0,$$

ossia, indicando con u una variabile qualsivoglia compresa fra $-\infty$ e ∞:

$$\varphi(-u) = -\chi(u). \qquad (3)$$

D'altra parte, staranno le (2, § 535), come nel caso precedente, però per s compreso fra 0 e ∞, mentre per valori negativi della variabile $f(s)$ e $g(s)$ non sono date; per modo che

da esse si deducono le (3, § 335) soltanto nell'ipotesi che sia $s - at \geqq 0$, $s + at \geqq 0$.

Supposto invece $s - a t < 0$, con che $s + a t \geqq 0$, abbiamo per (3, § 535) e (3):

$$\varphi(s - a t) = -\frac{f(a t - s) + g(a t - s)}{2}, \quad \chi(s + a t) = \frac{f(s + a t) + g(s + a t)}{2},$$

e supposto $s + a t < 0$, con che $s - a t \geqq 0$, parimente:

$$\varphi(s - a t) = \frac{f(s - a t) - g(s - a t)}{2}, \quad \chi(s + a t) = -\frac{f(-(s + a t)) - g(-(s + a t))}{2}.$$

§ 537. — Notiamo che nel precedente caso i due movimenti ondulatorii corrispondenti a φ e χ, che distingueremo coi termini di positivo e negativo, sono fra loro indipendenti: e non così nel secondo caso, in cui:

$$\varphi(s - a t) = -\chi(-s + a t);$$

per modo che il movimento ondulatorio positivo, cioè che si propaga nel senso in cui cresce s (§ 533), che è il senso della normale al piano limitante volta dalla parte del mezzo, è tale che, ad ogni istante, in ogni piano d'onda, lo spostamento è eguale ed opposto a quello che, allo stesso istante, col movimento negativo, apparterrebbe al piano simmetrico rispetto al piano limite, se il mezzo fosse completamente illimitato. I due movimenti, negativo e positivo, così connessi si dicono rispettivamente " incidente " e " riflesso ": e il piano fisso, concepito come limite d'un ostacolo materiale, " parete riflettente ".

Teorema di Betti.

§ 538. — Supposto $(\Delta \Xi, \Delta \Upsilon, \Delta Z)$ e $(\Delta X_n, \Delta Y_n, \Delta Z_n)$ tali da determinare una posizione d'equilibrio elastico d'un corpo, si avrà:

$$\int k(\Delta \Xi \, \delta \xi + \ldots) \, d\tau + \int (\Delta X_n \, \delta \xi + \ldots) \, d\sigma$$
$$+ \int \left(\frac{df}{dx_x} \frac{d\delta x}{dx_0} + \ldots + \frac{df}{dy_z} \left(\frac{d\delta \zeta}{dy_0} + \frac{d\delta \eta}{dz_0} \right) + \ldots \right) d t = 0$$

nella qual' equazione si può prendere per δx, δy, δz *qualunque terna di funzioni delle* x_0, y_0, z_0, continue finite e dotate di derivate parziali continue e finite (§ 515).

Ciò premesso, indichi, come precedentemente, (ξ, η, ζ) lo spostamento relativo al punto (x_0, y_0, z_0) corrispondente alla suddetta posizione d'equilibrio; e analogamente rappresentino $(\Delta \Xi', \Delta \Upsilon', \Delta Z')$ e $(\Delta X_n', \Delta Y_n', \Delta Z_n')$ due sistemi di forze e pressioni prestabilite, cui corrisponde una posizione d'equilibrio del corpo considerato, e (ξ', η', ζ') lo spostamento corrispondente, relativo allo stesso punto (x_0, y_0, z_0).

Oltre di che $x_x, \ldots y_z, \ldots$ e $x'_x, \ldots y'_z, \ldots$ dinotino i parametri di dilatazione relativi al punto (x_0, y_0, z_0) nelle due posizioni d'equilibrio (cfr. (1, § 516)).

Avremo:

$$\int k(\Delta \Xi \xi' + \ldots) d\tau + \int (\Delta X_n \xi' + \ldots) d\sigma + \int \left(\frac{df}{dx_x} x'_x + \ldots \right) d\tau = 0,$$

$$\int k(\Delta \Xi' \xi + \ldots) d\tau + \int (\Delta X'_n \xi + \ldots) d\sigma + \int \left(\frac{df}{dx'_x} x_x + \ldots \right) d\tau = 0;$$

dalle quali, siccome, essendo f una forma quadratica, si ha:

$$\frac{df}{dx_x} x'_x + \ldots = \frac{df}{dx'_x} x_x + \ldots \quad ,$$

si ricava, sottraendo membro a membro:

$$\int k(\Delta \Xi \xi' + \Delta \Upsilon \eta' + \Delta Z \zeta') d\tau + \int (\Delta X_n \xi' + \Delta Y_n \eta' + \Delta Z_n \zeta') d\sigma$$

$$= \int k(\Delta \Xi' \xi + \Delta \Upsilon' \eta + \Delta Z' \zeta) d\tau + \int (\Delta X'_n \xi + \Delta \Upsilon'_n \eta + \Delta Z'_n \zeta) d\sigma.$$

Questa notevole relazione costituisce il " teorema di *Betti*, " che, per la sua applicazione al problema dell'equilibrio elastico, si può considerare, da un certo punto di vista, come la forma propria di questo caso del teorema delle velocità virtuali. *

---

* V. *Betti.* — *Teoria dell'Elasticità*, Pisa, 1874.

Fluidi perfetti.

§ 539. — Tolta ogni restrizione generale che non sia quella del movimento continuo regolare, soggetto alle condizioni per cui si verificano le proprietà della pressione a suo luogo stabilite, varie ipotesi preventivamente stabilite sulla pressione medesima definiscono altrettante specie di mobili, che si comprendono sotto il nome di " fluidi ", per l'analogia del movimento che ne risulta con quello dei corpi naturali così denominati nel linguaggio famigliare.

§ 540. — L'ipotesi, emergente per la sua semplicità, che in ogni punto e ad ogni istante la grandezza della pressione specifica sia indipendente dal raggio relativo, e la sua orientazione, per tutti i raggi, quella del raggio o l'opposta, definisce i " fluidi perfetti ". E ciò equivale a supporre eguali fra loro le pressioni principali. Infatti mentre, da una parte, è quest'uguaglianza una immediata conseguenza di tale ipotesi, reciprocamente, se essa si ammette *a priori*, e si indica con p il comune valore delle pressioni principali nel punto (x, y, z), le

$$X_x = \alpha_1{}^2 p_1 + \alpha_2{}^2 p_2 + \alpha_3{}^2 p_3,$$
$$Y_z = \beta_1 \gamma_1 p_1 + \beta_2 \gamma_2 p_2 + \beta_3 \gamma_3 p_3,$$

(cfr. § 401) e analoghe, danno:

$$\left. \begin{array}{c} X_x = Y_y = Z_z = p, \\ Y_z = Z_y = Z_x = X_z = X_y = Y_x = 0, \end{array} \right\} \tag{1}$$

donde, per le (1, § 398):

$$X_n = p \cos(n\,x), \quad Y_n = p \cos(n\,y), \quad Z_n = p \cos(n\,z). \tag{2}$$

E per conseguenza:

$$X_n{}^2 + Y_n{}^2 + Z_n{}^2 = p^2,$$
$$\frac{X_n}{\cos(n\,x)} = \frac{Y_n}{\cos(n\,y)} = \frac{Z_n}{\cos(n\,z)} = p;$$

per modo che la pressione specifica relativa ad ogni raggio ha grandezza $|p|$, e la direzione del raggio, collo stesso senso o l'opposto secondo che p è positivo o negativo.

§ 541. — La quantità di cui p è la misura, e l'unità quella di pressione specifica (§ 392), si chiama senz'altro la " pressione specifica ", al supposto istante, nel punto considerato del fluido. Giova tener presente che p è la misura della pressione specifica relativa ad un raggio qualunque uscente dal punto considerato, il raggio fungendo da asse.

Risulta dall'esperienza che la densità è funzione del posto e del tempo, composta colla pressione e con quell'altra quantità, parimente variabile con essi nel corso del movimento, che si chiama la " temperatura ". Questa quantità è egualmente collegata col movimento e col calore, per modo che uno studio del movimento dei corpi, che contempli anche la variazione della temperatura, non è possibile che col concorso della Termodinamica — chè così si chiama la scienza delle relazioni fra il calore e il movimento, alle quali abbiamo più d'una volta accennato, colla Meccanica propriamente detta — e oltrepassa i limiti che ci siamo proposti.

Noi supporremo che la temperatura nel corso del movimento si mantenga dappertutto costante, oppure che esista qualche altra relazione fra le tre quantità, la quale permetta d'eliminarla, per modo che in ogni caso k riesca funzione della sola p.

§ 542. — Come caso particolare, k può ridursi una costante. Allora, per l'equazione della continuità:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

cioè nullo in ogni punto, ad ogni istante, il modulo di dilatazione cubica (§ 168).

Quando questo si supponga verificarsi, *qualunque siano le forze e le condizioni iniziali*, il fluido si dice " incomprimibile ", oppure " un liquido ": e ogni suo atto di movimento virtuale s'intende vincolato dalla condizione

$$\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} = 0.$$

§ 543. — Diversamente il fluido si dice " comprimibile " o " aeriforme " o " un gas ". E in questo caso si ammette che reciprocamente p sia funzione di k.

Nei gas così detti " perfetti ", indicando con θ la misura della temperatura (assoluta), e con A una costante, le leggi di *Boyle* e di *Gay Lussac* insieme collegate forniscono la relazione:

$$k = A \frac{p}{\theta}.$$

Quindi, supposta la temperatura costante:

$$k = a\, p;$$

dove a dinota una nuova costante.

Supposto che, variando almeno una delle tre quantità, si mantenga costante la quantità di calore nel corpo e in ogni sua parte, piccola finchè si vuole, esiste una seconda relazione, conformemente alla quale è:

$$k = C p^{\frac{1}{\mu}},$$

ove C dinota un coefficiente costante, e μ " rapporto del calore specifico a pressione costante al calore specifico a volume costante " è prossimamente $\sqrt{2}$.

Forma primitiva delle equazioni del movimento dei fluidi perfetti.

§ 544. — Le (1, § 399), introducendovi le (1, § 540), diventano:

$$k \frac{d^2 x}{d t^2} = k\, X_1 - \frac{d p}{d x}, \quad k \frac{d^2 y}{d t^2} = k\, Y_1 - \frac{d p}{d y}, \quad k \frac{d^2 z}{d t^2} = k\, Z_1 - \frac{d p}{d z},$$

che, in confronto di quelle che se ne sviluppano coi procedimenti che esamineremo, si possono chiamare la forma primitiva delle equazioni del movimento dei fluidi perfetti.

Teorema di d'Alembert nei fluidi perfetti.

§ 545. — La potenza delle forze intime corrispondente ad un atto di movimento virtuale qualsivoglia (§ 404) riesce espressamente per le (1, § 540), da

$$\int p \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right) d\tau ;$$

ed essendo (4, § 240):

$$\delta k + k \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right) = 0 ,$$

più semplicemente da

$$- \int p \, \frac{\delta k}{k} \, d\tau . \qquad (1)$$

Così, la potenza delle forze intime corrispondenti ad un atto di movimento virtuale qualsivoglia in un fluido incomprimibile ha valor zero (§ 542).

Supposto invece il fluido comprimibile, concepiamo p come funzione di k (§ 543), e definiamo la funzione f di k (o quando ci piaccia di p) con

$$\frac{df}{dk} = - \frac{p}{k^2} .$$

Ne segue:

$$- p \, \frac{\delta k}{k^2} = \delta f ;$$

e quindi, per (1), l'espressione della grandezza della potenza delle forze intime:

$$\delta \int f k \, d\tau ;$$

secondo il qual risultato l'integrale $\int f k \, d\tau$ si chiama il " potenziale delle forze intime " (cfr. §§ 287, 401).

§ 546. — La misura della potenza delle pressioni applicate ai punti del complesso delle superficie limitanti è rappresentata per le (2, § 540) da

$$\int p\,(\cos(nx)\,dx + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z)\,d\sigma;$$

ovvero, indicando con υ la grandezza della velocità virtuale $(\delta x, \delta y, \delta z)$, e quindi con (υn) l'angolo formato da essa colla normale nel punto (x, y, z), volta verso il fluido limitato da σ, da

$$\int p\,\upsilon\cos(\upsilon n)\,d\sigma.$$

Ma, per ogni punto vincolato a serbarsi sopra una superficie prestabilita, mobile o fissa, sarà (§ 185):

$$\cos(\upsilon n) = 0.$$

Quindi la potenza in discorso ha valore diverso da zero soltanto per le superficie limitanti " libere ".

§ 547. — In conseguenza di questi risultati il teorema di *d'Alembert*, nel caso di un fluido perfetto, viene espresso da

$$\left.\begin{aligned}\int k\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X_1\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y_1\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z_1\right)\delta z - \delta f\right\}d\tau \\ = \int p\,\delta n\,d\sigma,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove l'integrale del secondo membro si estende alle superficie limitanti libere; e, se il fluido è incomprimibile, f è definito da

$$\frac{df}{dk} = -\frac{p}{k^2},$$

mentre, se è incomprimibile, si attribuirà a f il valor zero.

Quest'equazione, collo stesso significato di tutti i simboli, sta egualmente pel sistema di due o più fluidi diversi a mutuo contatto; poichè applicandola al sistema, nel quale per un momento le superficie di contatto si contino come superficie limite libere dei singoli fluidi, i termini relativi a queste superficie, pei §§ 403 e 185, si elidono.

§ 548. — All'atto di movimento effettivo al tempo t si applica la stessa equazione, nell'ipotesi che le superficie cui il fluido è obbligato ad aderire, se ve ne sono, siano fisse.

Che se, in tutto l'intervallo di tempo considerato, la potenza delle pressioni applicate al complesso delle superficie limitanti sarà nulla ad ogni istante, e il sistema delle forze applicato ai punti del fluido ammetterà potenziale, il movimento soddisfarà il teorema della conservazione dell'energia (§ 285).

§ 549. — Supposto che in ogni punto d'una superficie σ' abbia p lo stesso valore, si avrà per la relativa potenza:

$$\int p\,\delta n\,d\sigma' = p\int\delta n\,d\sigma'.$$

Ora, $\int\delta n\,d\sigma$, esteso a tutto il contorno del fluido, ha un significato semplicissimo. Immaginiamo infatti nel campo occupato dal fluido una superficie parimente chiusa *fissa*, σ_0, e una successione di superficie, che si comprendono l'una l'altra, senza incontrarsi in alcun punto, la quale cominci con σ_0 e termini con σ. Noi potremo intendere che n, nella suddetta espressione, rappresenti la lunghezza della trajettoria normale passante pel punto qualsivoglia di σ, intesa crescente verso σ_0. D'altra parte, competerà un valore di n ad ogni individuo della successione, come grandezza dell'arco di trajettoria normale passante pel supposto punto di σ, compreso fra σ e l'individuo medesimo. Indichi ρ il rapporto dell'elemento superficiale di questo individuo corrispondente alla sua intersezione colla trajettoria normale in discorso all'elemento superficiale, $d\sigma_0$, di σ_0, corrispondente alla sua intersezione colla stessa trajettoria normale. Si avrà per la grandezza τ del volume della figura compresa fra σ_0 e σ:

$$\tau = \int_{\sigma_0} d\sigma_0 \int\rho\,dn,$$

dove nell'integrazione rispetto ad n si devono prendere per limite inferiore e superiore il valore corrispondente a σ e a σ_0 rispettivamente. E di qui scaturisce, indicando per un momento con ρ_σ il valore di ρ nel punto qualunque di σ, per modo che $\rho_\sigma\,d\sigma_0 = d\sigma$, e inteso $\delta\tau$ corrispondente ad una variazione di σ:

$$\delta\tau = -\int_{\sigma_0}\rho_\sigma\,\delta n\,d\sigma_0 = -\int_\sigma\delta n\,d\sigma.$$

Si conclude:

$$\int \delta n \, d\sigma = -\delta\tau;$$

e se il fluido è incomprimile:

$$\int \delta n \, d\sigma = 0. \qquad (1)$$

Le quali relazioni stanno pel complesso delle superficie libere; poichè, per ogni punto della parte rimanente del contorno (se ce n'è), $\delta n = 0$.

Vasi comunicanti — Torchio idraulico.

§ 550. — Sia un liquido in equilibrio in tal posizione che la potenza delle forze limite applicate ai suoi punti sia nulla per ogni atto di movimento virtuale relativo alla posizione medesima: e la superficie libera si componga di due pezzi distinti, σ_1 e σ_2, in ogni punto dei quali la pressione specifica abbia misura costante, p_1 e p_2 rispettivamente.

L'equazione (1, § 547) si riduce a

$$p_1 \int \delta n \, d\sigma_1 + p_2 \int \delta n \, d\sigma_2 = 0.$$

D'altra parte, per l'incomprimibilità del fluido (1, § 549):

$$\int \delta n \, d\sigma_1 + \int \delta n \, d\sigma_2 = 0.$$

Quindi:

$$p_1 = p_2.$$

Ne viene che la grandezza della pressione applicata alle due superficie (§ 396) sarà rispettivamente $|p|\sigma_1$, $|p|\sigma_2$, indicando con p il valor comune di p_1, p_2, e cioè proporzionale alla grandezza delle superficie medesime. Ciò che costituisce il noto principio del " torchio idraulico ".

Forma di Lagrange delle equazioni del movimento dei fluidi perfetti.

§ 551. — Indichino a, b, c tre variabili atte a individuare il posto occupato ad un certo tempo, che chiameremo l'istante iniziale, del punto del fluido le cui coordinate al tempo qualunque t sono x, y, z. Esse potranno essere i valori di x, y, z al suddetto istante, nel qual caso ci varremo anche dei simboli speciali x_0, y_0, z_0, o le coordinate polari dello stesso posto, o qualunque altra terna di parametri equivalente.

Le x, y, z saranno funzioni di a, b, c e di t, note le quali il movimento del fluido riesce determinato.

A tal fine moltiplichiamo le equazioni del § 544 rispettivamente per $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$, e sommiamole membro a membro. Otteniamo così la prima delle equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X_1\right)\frac{dx}{da}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y_1\right)\frac{dy}{da}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z_1\right)\frac{dz}{da}+\frac{1}{k}\frac{dp}{da}=0,\\
\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X_1\right)\frac{dx}{db}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y_1\right)\frac{dy}{db}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z_1\right)\frac{dz}{db}+\frac{1}{k}\frac{dp}{db}=0,\\
\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X_1\right)\frac{dx}{dc}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y_1\right)\frac{dy}{dc}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z_1\right)\frac{dz}{dc}+\frac{1}{k}\frac{dp}{dc}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Poniamo:

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}\frac{dx}{da} & \frac{dx}{db} & \frac{dx}{dc}\\ \frac{dy}{da} & \frac{dy}{db} & \frac{dy}{dc}\\ \frac{dz}{da} & \frac{dz}{db} & \frac{dz}{dc}\end{vmatrix},$$

Sarà, coi simboli del § 240:

$$\mathrm{D} = J\,D,$$

dove J indica il determinante funzionale delle x_0, y_0, z_0 rispetto alle a, b, c.

Quindi, per l'equazione della conservazione della massa (2, § 240):

$$\frac{d\,\mathrm{D}\,k}{dt} = 0, \tag{2}$$

che, nel caso dei fluidi incomprimibili, si riduce a

$$\frac{d\,\mathrm{D}}{dt} = 0. \tag{3}$$

In questo caso, la costante k rappresenta un dato del problema. Invece, nel caso dei fluidi comprimibili, la relazione fra p e k (§§ 541, 543) permetterà di eliminare una delle due incognite a piacere.

Si ottiene così, in ogni caso, colle (1) e la (2), o la (3), un sistema di quattro equazioni alle derivate parziali, le quali permetteranno di determinare le quattro incognite x, y, z e p (ovvero k) in funzione delle variabili indipendenti a, b, c, e t: col concorso delle condizioni di tempo e di spazio proprie dei singoli problemi, come i valori delle incognite e loro derivate rispetto a t per un determinato valore di t, o i loro valori e quelli delle loro derivate rispetto alle diverse variabili in punti determinati, cioè corrispondenti a determinati valori di a, b, c, per ogni valore di t, ed altre simili relazioni (cfr. § 521).

Definiamo P, (cfr. § 541) funzione di p, colla relazione:

$$\frac{dP}{dp} = \frac{1}{k}.$$

Le (1) si possono con ciò porre sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X_1\right)\frac{dx}{da} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y_1\right)\frac{dy}{da} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z_1\right)\frac{dz}{da} + \frac{dP}{da} = 0,\\
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X_1\right)\frac{dx}{db} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y_1\right)\frac{dy}{db} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z_1\right)\frac{dz}{db} + \frac{dP}{db} = 0,\\
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X_1\right)\frac{dx}{dc} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y_1\right)\frac{dy}{dc} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z_1\right)\frac{dz}{dc} + \frac{dP}{dc} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Supponiamo infine che le forze limite (X_1, Y_1, Z_1) ammettano funzione delle forze V, per modo che:

$$X_1 = \frac{dV}{dx}, \qquad Y_1 = \frac{dV}{dy}, \qquad Z_1 = \frac{dV}{dz}.$$

In tal caso le stesse equazioni si riducono alla forma notevolmente più semplice:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{da}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{da}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{da}&=\frac{d(V-P)}{da},\\
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{db}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{db}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{db}&=\frac{d(V-P)}{db},\\
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dc}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dc}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dc}&=\frac{d(V-P)}{dc}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)''$$

Queste, nei varii casi, si dicono le " equazioni di *Lagrange* del movimento dei fluidi perfetti ".

Forma d'Euler delle equazioni del movimento dei fluidi perfetti.

§ 552. — Poniamo:

$$\frac{dx}{dt}=u, \qquad \frac{dy}{dt}=v, \qquad \frac{dz}{dt}=w. \qquad (1)$$

Supposto per un momento che u, v, w siano funzioni note di x, y, z e t, e siano dati i valori x_0, y_0, z_0 di x, y, z per $t = 0$, sarà questo un sistema d'equazioni alle derivate ordinarie del primo ordine, per mezzo del quale si potranno completamente determinare x, y, z in funzione di t (cfr. § 141).

Ora, dalle equazioni primitive (§ 544), concependo x, y, z come coordinate del posto qualunque dello spazio occupato dal fluido nell'intervallo di tempo di cui t rappresenta il valore qualsivoglia, si ricava (2, § 174):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{du}{dx}u+\frac{du}{dy}v+\frac{du}{dz}w&=X_1-\frac{1}{k}\frac{dp}{dx},\\
\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{dv}{dx}u+\frac{dv}{dy}v+\frac{dv}{dz}w&=Y_1-\frac{1}{k}\frac{dp}{dy},\\
\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{dw}{dx}u+\frac{dw}{dy}v+\frac{dw}{dz}w&=Z_1-\frac{1}{k}\frac{dp}{dz}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Inoltre si ha (5, § 240):

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{dku}{dx}+\frac{dku}{dy}+\frac{dkw}{dz}=0;$$

che nel caso dei fluidi incomprimibili si riduce a

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

E così, immaginando nel caso dei fluidi comprimibili eliminata una delle due incognite k e p, per mezzo della relazione che le collega, si hanno quattro equazioni alle derivate parziali, le quali permetteranno di determinare le incognite u, v, w e p (ovvero k) in funzione delle variabili indipendenti x, y, z e t, col concorso delle condizioni di tempo e di spazio particolari dei varii problemi (cfr. §§ 521, 551).

Compiuta questa determinazione, le (1) forniranno, come abbiamo veduto, in funzione del tempo t le coordinate x, y, z del punto che al tempo zero occupa il posto (x_0, y_0, z_0): con che il movimento del fluido sarà determinato.

Queste sono le " equazioni di *Euler* del movimento dei fluidi perfetti ".

Notiamo come, supposto che le forze limite (X_l, Y_l, Z_l) ammettano funzione delle forze V, valendosi della funzione P (§ 551), le (2) prendono la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{du}{dx}u+\frac{du}{dy}v+\frac{du}{dz}w=\frac{d(V-P)}{dx},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{dv}{dx}u+\frac{dv}{dy}v+\frac{dv}{dz}w=\frac{d(V-P)}{dy},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{dw}{dx}u+\frac{dw}{dy}v+\frac{dw}{dz}w=\frac{d(V-P)}{dz}.$$

Vortici.

§ 553. — Supponiamo che le forze limite (X_l, Y_l, Z_l) ammettano funzione delle forze, per modo che abbiasi (§ 551, § 158):

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dx_0}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dx_0}+\frac{dz}{dt^2}\frac{dz}{dx_0}=\frac{d(V-P)}{dx_0},$$

$$(x_0, y_0, z_0).$$

Differenziamo la seconda di queste espressioni rispetto a z_0, la terza rispetto a y_0, e ciò fatto, sottraggiamo la terza dalla seconda. Il secondo membro dell'equazione che così si ottiene è o, e il primo integrabile rispetto a t, poichè:

$$\frac{d}{d z_0}\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\frac{d x}{d y_0}\right)-\frac{d}{d y_0}\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\frac{d x}{d z_0}\right)=\frac{d x}{d y_0}\frac{d^2\frac{d x}{d z_0}}{d t^2}-\frac{d x}{d z_0}\frac{d^2\frac{d x}{d y_0}}{d t^2}$$

$$=\frac{d}{d t}\left(\frac{d x}{d y_0}\frac{d\frac{d x}{d z_0}}{d t}-\frac{d x}{d z_0}\frac{d\frac{d x}{d y_0}}{d t}\right)=\frac{d}{d t}\left(\frac{d x}{d y_0}\frac{d u}{d z_0}-\frac{d x}{d z_0}\frac{d u}{d y_0}\right).$$

Quindi, indicando con A', B', C' tre parametri indipendenti da t, concepite le suddette equazioni integrate membro a membro rispetto a t, ne risulta la prima delle

$$\frac{d u}{d z_0}\frac{d x}{d y_0}-\frac{d u}{d y_0}\frac{d x}{d z_0}+\frac{d v}{d z_0}\frac{d y}{d y_0}-\frac{d v}{d y_0}\frac{d y}{d z_0}+\frac{d w}{d z_0}\frac{d z}{d y_0}-\frac{d w}{d y_0}\frac{d z}{d z_0}=2A',$$
$$(x_0, y_0, z_0) \qquad (A', B', C').$$

Moltiplichiamo queste tre equazioni rispettivamente per $\frac{d x}{d x_0}$, $\frac{d x}{d y_0}$, $\frac{d x}{d z_0}$, e sommiamole poi membro a membro. Otteniamo, coi simboli del § 240, per primo membro:

$$(z x_0)\frac{d v}{d x_0}+(z y_0)\frac{d v}{d y_0}+(z z_0)\frac{d v}{d z_0}-(y x_0)\frac{d w}{d x_0}-(y y_0)\frac{d w}{d y_0}-(y z_0)\frac{d w}{d z_0},$$

ossia:

$$D\left(\frac{d v}{d z}-\frac{d w}{d y}\right).$$

Poniamo ora:

$$A'=-k D A, \quad B'=-k D B, \quad C'=-k D C,$$

osservando che $k D$ è per (2, § 551) indipendente da t; e rammentiamo che le componenti p, q, r della velocità angolare del fluido nel punto (x, y, z) al tempo t sono date (§ 168) da

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{d w}{d y}-\frac{d v}{d z}\right), q=\frac{1}{2}\left(\frac{d u}{d z}-\frac{d w}{d x}\right), r=\frac{1}{2}\left(\frac{d v}{d x}-\frac{d u}{d y}\right).$$

La relazione trovata si riduce così alla prima delle tre:

$$p = k\left(A \frac{dx}{dx_0} + B \frac{dx}{dy_0} + C \frac{dx}{dz_0}\right),$$

$$q = k\left(A \frac{dy}{dx_0} + B \frac{dy}{dy_0} + C \frac{dy}{dz_0}\right),$$

$$r = k\left(A \frac{dz}{dx_0} + B \frac{dz}{dy_0} + C \frac{dz}{dz_0}\right).$$

Si riconosce immediatamente, facendo $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, che A, B, C sono i valori di p, q, r per $t = 0$, divisi pel corrispondente valore k_0 di k. Quindi, indicando quei valori con p_0, q_0, r_0:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{k}{k_0}\left(p_0 \frac{dx}{dx_0} + q_0 \frac{dx}{dy_0} + r_0 \frac{dx}{dz_0}\right), \\ q &= \frac{k}{k_0}\left(p_0 \frac{dy}{dx_0} + q_0 \frac{dy}{dy_0} + r_0 \frac{dy}{dz_0}\right), \\ r &= \frac{k}{k_0}\left(p_0 \frac{dz}{dx_0} + q_0 \frac{dz}{dy_0} + r_0 \frac{dz}{dz_0}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

È questa un'espressione assai notevole delle componenti della velocità angolare in un punto, valevole nelle ammesse ipotesi: donde emerge, in primo luogo, l'importante proposizione che " supposto un fluido in movimento continuo regolare, retto da forze limite dotate di funzione delle forze, se la velocità angolare in un punto è nulla quando esso occupa un certo posto, cioè ad un certo istante, si mantiene nulla in ogni altro posto del punto medesimo, vale a dire ad ogni istante del movimento ". Dalla qual proposizione segue immediatamente l'altra che " se la velocità angolare in un punto del fluido non è nulla in un certo suo posto, cioè ad un istante, non sarà nulla in ogni altro suo posto, e cioè ad ogni altro istante ".

Altra notevole proposizione è la seguente. Immaginiamo nel fluido al tempo zero una linea avente la proprietà che la tangente in ogni suo punto ha la direzione della velocità angolare nel punto medesimo al supposto istante. Indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto qualunque di questa linea, e

col simbolo d il differenziale rispetto al parametro che ne individua i punti, sarà:

$$\frac{dx_0}{p_0} = \frac{dy_0}{q_0} = \frac{dz_0}{r_0} = \frac{ds_0}{\omega_0},$$

dove ds_0 dinota il differenziale della grandezza dell'arco della linea, e ω_0 la misura della velocità angolare nel punto considerato (x_0, y_0, z_0). Alla linea in discorso corrisponderà punto per punto una linea nel fluido al tempo qualunque t. Siano al solito x, y, z le coordinate a questo tempo del punto le cui coordinate al tempo zero sono x_0, y_0, z_0, per modo che x, y, z funzioni del suddetto parametro composte con x_0, y_0, z_0. Introducendo le precedenti relazioni nelle (1), queste diventano:

$$p = \frac{\omega_0}{k_0\, ds_0}\, k\, dx, \qquad q = \frac{\omega_0}{k_0\, ds_0}\, k\, dy, \qquad r = \frac{\omega_0}{k_0\, ds_0}\, k\, dz.$$

Ne viene:

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r}.$$

E per conseguenza: " Se una linea di punti d'un fluido (nelle ammesse ipotesi) possiede la proprietà che la tangente ad ogni suo punto ha la direzione della velocità angolare in questo punto quando occupa una certa posizione, cioè ad un certo istante, mantiene la stessa proprietà in ogni altra sua posizione, vale a dire ad ogni istante. „ In altri termini: " Se una linea di punti del fluido possiede in una sua posizione, ossia ad un istante, la proprietà che la tangente in ogni suo punto è l'asse di rotazione dell'atto di movimento rotatorio relativo al punto in quell'istante, possederà la stessa proprietà in ogni altra sua posizione, ossia ad ogni istante. „

Una linea siffatta, con termine di *Helmholtz* (Wirbellinie) si chiama una " linea vortice „, o anche semplicemente " un vortice „.

Per quanto precede, " un vortice non può, nel corso d'un movimento continuo regolare retto da forze limite dotate di funzione delle forze, nè crearsi nè distruggersi „: espressione di cui la precedente trattazione spiega abbastanza il significato.

Vediamo altresì come il movimento d' un insieme continuo di punti del fluido in ognuno dei quali esiste velocità angolare risulta quello d' un fascio di vortici. E conformemente a ciò il movimento d'un fluido nelle supposte condizioni si dice " vorticoso ".

§ 554. — Senza inoltrarci troppo oltre in questo campo, chè sarebbe uscire dai limiti del nostro disegno, rileviamo alcune ovvie proprietà.

Per le (2) del § precedente:

$$\frac{\omega}{k\,\mathrm{d}s} = \frac{\omega_0}{k_0\,\mathrm{d}s_0},$$

cioè questa espressione, per un punto del fluido, è invariabile nelle sue diverse posizioni, ossia ai diversi istanti del movimento.

È poi pel teorema di *Gauss* (§ 68):

$$\int \frac{dp}{dx}\,d\tau + \int p \cos(nx)\,d\sigma = 0,$$

$$\int \frac{dq}{dy}\,d\tau + \int q \cos(ny)\,d\sigma = 0,$$

$$\int \frac{dr}{dz}\,d\tau + \int r \cos(nz)\,d\sigma = 0.$$

D'altra parte:

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0.$$

Quindi, sommando membro a membro:

$$\int \omega \cos(n\omega)\,d\sigma = 0.$$

Immaginiamo un fascio di vortici nel suo stato al tempo t, e applichiamo questa relazione al pezzo limitato dalla superficie tubulare formata dai vortici passanti per una certa linea chiusa, e da due sezioni trasversali di essa. Nei punti della superficie tubulare sarà $\cos(n\omega) = 0$; e perciò, indicando con $(n_1\,\omega_1)$, $(n_2\,\omega_2)$ gli angoli formati nei punti delle due sezioni dalla normale, *volta in senso concorde rispetto alle due sezioni* medesime (cioè, se l'una interna, l'altra esterna al campo) coll' asse di rotazione, e con

ω_1 e ω_2, σ_1 e σ_2, le misure della velocità angolare nei punti delle due sezioni, e le grandezze delle aree, la relazione si traduce nella

$$\int \omega_1 \cos(n_2 \omega_1)\, d\sigma_1 = \int \omega_2 \cos(n_2 \omega_2)\, d\sigma_2 :$$

la quale esprime che, per tutte le sezioni trasversali σ del fascio, ad uno stesso istante, è:

$$\int \omega \cos(n \omega)\, d\sigma = Cost.$$

o anche (§ 65):

$$\overline{\omega \cos(n \omega)}\, \sigma = Cost.$$

dove l' espressione sopra lineata dinota il valore in un certo posto della sezione.

Da questa relazione scaturisce (sempre ammessa la continuità delle funzioni) che un fascio di vortici non può terminare nell'interno del fluido. Difatti, perchè ciò si verifichi, o sopra una certa sezione dev'essere dappertutto $\omega = 0$, o tutti i vortici del fascio debbono riunirsi in un punto, e col tendere d'una sezione ad esso, la sua area σ avrà per limite o. Quindi in ambedue i casi:

$$\overline{\omega \cos(n \omega)}\, \sigma = 0,$$

cioè:

$$\overline{\omega} = 0,$$

per modo che ogni sezione dovrà contenere almeno un punto per cui $\omega = 0$. Questa conseguenza regge senz'altro, come per tutto il fascio, anche per ogni sua parte, formata dai vortici che passano per un contorno tracciato ad arbitrio in una sezione qualsivoglia. E ciò non è possibile; poichè, preso in una sezione un punto nel quale non sia $\omega = 0$, si potrà con un contorno limitare una parte di essa in tutti i punti della quale ω conserva lo stesso segno, e non si annulla.

Si conclude che un fascio di vortici o sarà rientrante, o terminerà alla superficie del fluido.

§ 555. — Il movimento vorticoso fu scoperto da *Helmholtz*; * e per dare un' idea dell'estensione delle sue applicazioni, ricorderemo l'idea di *Thomson* che anelli di vortici dell' " etere cosmico ", per la precedente teoria nè creabili nè distruggibili da forze naturali (dotate di funzione delle forze), costituiscano le particelle estreme dei corpi. ** L'esistenza in natura del movimento vorticoso emerge, fra gli altri, dal fenomeno degli " anelli di fumo ", che si formano, per esempio, allo sparo di un cannone, e prodotti in condizioni favorevoli, si possono studiare in modo da verificare l'accordo tra i fatti e le conseguenze dell'ipotesi che siano anelli di vortici dell'aria atmosferica. Donde s' inferisce che un siffatto anello di fumo è in sostanza una massa d' aria, che all' atto dello scoppio circonda la bocca del cannone, e, per effetto d'un impulso (governato da forze non dotate di funzione delle forze), riceve nei singoli suoi punti una velocità angolare. In seguito a che, con movimento collegato con quello dell'aria rimanente, ma serbandosi distinta da questa, si trasporta in seno ad essa, resa visibile dalle particelle solide che contiene sospese. Parimente, alcuni moti impulsivi impressi all'acqua d'un bacino generano dei mezzi anelli di vortici, i cui estremi appariscono alla superficie come areole ruotanti, che scorrono, scostandosi l'una dall'altra. In ogni caso i vortici sono, dopo un tempo più o meno lungo, distrutti dalle varie resistenze; e d'altra parte nessun fluido reale risponde esattamente alla definizione di fluido perfetto.

Movimento d'un fluido perfetto senza velocità angolare.

§ 556. — L' ipotesi che la velocità angolare sia nulla in ogni punto equivale a quella che esista la funzione delle velo-

* *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen — Journal für die reine und angewandte Mathematik* — Vol. 55, e *Wissenschaftliche Abhandlungen.* — Leipzig, 1881. — Vol. I, pag. 100.

** Cfr. *Tait. — Recent advances in physical science.* — London, 1876. — Lect. XII.

cità (§ 171); e ammesso che si verifichi ad ogni istante, tenendo calcolo di

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d}{dz}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

e analoghe relazioni, le equazioni del movimento d'un fluido perfetto (2, § 552) assumono la forma:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+P\right\}=X_l\,,$$
$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+P\right\}=Y_l\,,$$
$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+P\right\}=Z_l\,.$$

Troviamo così la condizione necessaria che le forze limite (X_l, Y_l, Z_l) ammettano funzione delle forze. Supposto che si verifichi, risulta poi necessario e sufficiente, per quanto s'è veduto sui vortici (§ 553), che ad un istante la velocità angolare in ogni punto sia nulla: condizione che si può riferire, se si vuole, all'istante iniziale.

In conclusione, perchè il movimento d'un fluido perfetto ammetta funzione delle velocità, φ, è necessario e sufficiente che si verifichi la condizione permanente che esista la funzione delle forze, V, e la condizione iniziale che, ad un istante, la velocità angolare sia nulla in ogni punto. Sotto queste condizioni le (2, § 552) diventano:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+P-V\right\}=0,$$

e l'altre due che se ne deducono cambiando x in y e in z: equivalenti all'unica:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+P-V=\mathfrak{T},$$

dove $\mathfrak{T}$ è indipendente da x, y, z.

Questa, data V, è una relazione fra φ e p (ovvero k); la quale, nel caso dei fluidi incomprimibili (k costante data), si riduce a

$$\frac{p}{k} = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] + \mathfrak{T},$$

e fornisce immediatamente la pressione specifica p, in termini di V e φ.

Nello stesso caso, si ha per definire φ (§ 240):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Mentre, nel caso dei fluidi incomprimibili, abbiamo (§ 240):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{d}{dx}\left(k\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(k\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(k\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0,$$

— seconda equazione fra k e φ — e la relazione fra k e p, che permette di eliminare una delle due incognite (§ 541).

Movimento senza velocità angolare di un fluido incomprimibile in cui è immersa una sfera fissa.

§ 557. Per dare un esempio, indaghiamo il movimento d'un fluido perfetto assoggettato alle condizioni seguenti:

1) Sia incomprimibile, cioè k costante data (§ 542).

2) Sia internamente limitato da una superficie sferica di centro e raggio invariabile (vi sia immersa una sfera fissa). Quindi, la componente della velocità nei punti di questa superficie sferica secondo il suo raggio, costantemente nulla (§ 178).

3) Si estenda esternamente all'infinito. E la velocità in un punto, col tendere di questo punto all'infinito, abbia un limite fisso.

4) Esista funzione delle forze, e ad un istante la velocità angolare sia nulla in ogni punto. Con che (§ 556) esisterà la funzione delle velocità; e questa per 1) sarà una soluzione di

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0: \tag{1}$$

per 2), indicando con r il raggio vettore rispetto al centro della sfera e con R il suo raggio, dovrà soddisfare a

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=R} = 0:$$

infine, per 3), dovrà soddisfare, indicando con A la grandezza del limite costante della velocità col tendere del punto all'infinito, e assumendo l'asse delle z — che supporremo passare pel centro della sfera — nella sua direzione, col verso opposto, a

$$\lim_{r=\infty} \frac{d\varphi}{dx} = \lim_{r=\infty} \frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad \lim_{r=\infty} \frac{d\varphi}{dz} = -A.$$

Ora, si riconosce immediatamente che alla prima e alla terza condizione si adempie coll'ipotesi:

$$\varphi = A\left(\mu \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - z\right),$$

dove μ rappresenta una costante qualsivoglia; poichè z è soluzione della (1), e lo è $\frac{1}{r}$ (§ 334), in conseguenza di che (l'equazione essendo lineare, senza termine noto) lo sono le sue derivate; e le derivate medesime, di qualunque ordine, svaniscono col crescere infinitamente di r.

Inoltre, colle stesse ipotesi:

$$\frac{d\varphi}{dr} = A\left(\frac{2\mu}{r^3} - 1\right)\frac{dz}{dr}.$$

E per conseguenza φ soddisfarà anche alla seconda condizione, pur di porre:

$$\mu = \frac{R^3}{2}.$$

Poichè φ non dipende che da r e z, ossia da ρ e z, indicando con ρ la distanza dall'asse delle z, per modo che $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, la velocità risulta eguale in tutti i punti che sono sopra uno stesso cerchio, col centro sopra l'asse delle z e in un piano ad

esso perpendicolare. Inoltre sarà nullo il coefficiente differenziale di φ secondo un asse perpendicolare al semipiano terminato all'asse delle z, contenente il punto considerato, e quindi la velocità parallela al semipiano medesimo.

Eseguendo le differenziazioni, troviamo:

$$\frac{d\varphi}{dz} = A\left(\frac{R^3}{2}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) - 1\right), \qquad \frac{d\varphi}{d\rho} = A\,\frac{R^3}{2}\,\frac{3z\rho}{r^5}.$$

Quindi:

$$\frac{dz}{dt} = A\left(\frac{R^3}{2}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) - 1\right), \qquad \frac{d\rho}{dt} = A\,\frac{R^3}{2}\,\frac{3z\rho}{r^5},$$

che forniscono la velocità nel punto (ρ, z), e formano una coppia d'equazioni differenziali alle derivate ordinarie del primo ordine per determinare, insieme coi valori iniziali, ρ e z in funzione di t.

Le due equazioni sono soddisfatte dall'ipotesi particolare:

$$\rho = 0,$$

corrispondente ai punti dell'asse delle z non appartenenti alla sfera.

Inoltre, moltiplicando la prima per z, la seconda per ρ, e sommandole, se ne ricava:

$$r\,\frac{dr}{dt} = A\left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right)z;$$

donde apparisce che sono anche soddisfatte dall'ipotesi:

$$r = R,$$

corrispondente ai mezzi circoli massimi della sfera contenuti nei singoli semipiani terminati all'asse delle z.

Collegando questi due risultati, la trajettoria di un punto che ad un istante si trova o sulla parallela alla velocità limite passante pel centro della sfera, o sulla superficie della sfera, si compone dei tratti di quella parallela esterni alla sfera e di mezzo circolo massimo passante per le sue intersezioni colla sfera. Apparirà da quel che segue come si levi la difficoltà che,

supposto il punto sui due tratti rettilinei, il mezzo circolo massimo non riesce determinato.

La prima delle due equazioni differenziali, fattovi $r = R$, e posto $z = 0$ per $t = 0$, fornisce pel tempo relativo al passaggio dal punto di mezzo del suddetto mezzo circolo massimo al suo punto qualsivoglia:

$$t = \frac{R}{3A} \log \frac{R - z}{R + z}. \qquad (1)$$

Ne viene $t = \mp \infty$ per $z = \pm R$, e cioè un tempo infinitamente grande per descrivere ciascuna metà del mezzo circolo. Questo risultato traduce nel caso in discorso la proposizione generale che un punto di un corpo in movimento continuo, se appartiene ad un istante al contorno, non l'abbandona in tutto il corso del movimento (§ 128); e significa che il tempo impiegato da un punto del fluido per descrivere il tratto di trajettoria compreso fra i piani tangenti alla sfera nelle estremità del diametro parallelo alla velocità limite risulterà superiore ad un valore prefissato, grande finchè si vuole, pur di supporre le intersezioni della trajettoria coi singoli piani entro un cerchio del piano, col centro nel punto di contatto, di raggio abbastanza limitato.

Dalla (1) si ricava:

$$z = -R \tanh \frac{3}{2} \frac{A}{R} t.$$

Quindi, poichè $\sqrt{\rho^2 + z^2} = R$:

$$\rho = \frac{R}{\cosh \frac{3}{2} \frac{A}{R} t};$$

le quali sono, pel caso del punto appartenente alla sfera, le relazioni fra le coordinate ed il tempo.

Una ricerca analoga si fa agevolmente nell'ipotesi che il punto appartenga ad uno dei tratti di parallela alla velocità limite passante pel centro della sfera: e il tempo relativo al passaggio da una sua posizione qualunque all'intersezione colla sfera risulta infinito.

Equilibrio dei fluidi perfetti.

§ 558. — Nell'ipotesi dell'equilibrio, cioè di x, y, z invariabili col tempo, le equazioni del § 544 forniscono ad ogni istante:

$$\frac{dp}{dx} = k\,X_l, \qquad \frac{dp}{dy} = k\,Y_l, \qquad \frac{dp}{dz} = k\,Z_l; \tag{1}$$

le quali, per le stesse equazioni, esprimono che l'accelerazione del punto (x, y, z) è nulla; per modo che, reciprocamente, è sufficiente per l'equilibrio ch'esse si verifichino ad ogni istante, e la velocità del punto (x, y, z) ad un istante sia nulla.

Pel § 242, k risulta invariabile col tempo; quindi, nel caso dei fluidi comprimibili, anche p, e per le precedenti equazioni, X_l, Y_l, Z_l ; ipotesi, questa, che facciamo in ogni caso.

Introducendo la P definita da

$$\frac{dP}{dp} = \frac{1}{k},$$

le (1) diventano

$$\frac{dP}{dx} = X_l, \qquad \frac{dP}{dy} = Y_l. \qquad \frac{dP}{dz} = Z_l;$$

donde scaturisce la condizione che le forze limite (X_l, Y_l, Z_l) ammettano funzione delle forze, V.

Soddisfatta questa condizione, le tre equazioni forniscono:

$$\int^p \frac{dp}{k} = V; \tag{2}$$

e di qui nel caso d'un fluido comprimibile scaturisce la condizione che la temperatura sia funzione di p (cfr. § 541): che se la temperatura è costante, vale a dire uniforme:

$$\log \frac{p}{\mathbf{P}} = a\,V, \qquad p = \mathbf{P}\,e^{a\,V}; \tag{3}$$

mentre nel caso del fluido incomprimibile:

$$p = k\,V + \mathbf{P}; \tag{4}$$

indicando con P un parametro indipendente da x, y, z, che risulterà determinato dal valore di p in un punto qualsivoglia.

Le (1) alla lor volta sono immediata conseguenza della (2). E per conseguenza la (2) ad ogni istante, e la velocità nulla in ogni punto ad un istante, sono per l'equilibrio condizioni necessarie e sufficienti.

§ 559. — La (2) del precedente § determina la misura della pressione specifica in ogni punto. La grandezza della densità k, nel caso dei fluidi incomprimibili è una costante data: in quello dei fluidi comprimibili si dedurrà da p. Queste sono, nella presente questione, le incognite principali, colla cui determinazione si connette, come vedremo, quella della forma del fluido in equilibrio, o " forma d'equilibrio „ corrispondente alle supposte condizioni.

§ 560. — Le superficie:

$$p = Cost.$$

si chiamano " isobariche „; e il loro insieme coincide, per quanto precede, con quello delle superficie:

$$V = Cost.,$$

cioè delle superficie di livello del sistema delle forze limite applicato ai punti del fluido. Nel caso dei fluidi comprimibili, colle stesse superficie coincideranno le

$$k = Cost.$$

che possiamo chiamare " isopicnotiche „ (πυκνοτής = densità).

§ 561. — Supposto il fluido limitato, le precedenti condizioni implicano che la superficie limitante sia invariabile col tempo; e quindi invariabile col tempo la direzione della pressione specifica (X_n, Y_n, Z_n) in ogni punto di essa, che deve essere quella della normale alla superficie, mentre la misura p sarà fornita dalla (2, § 558): e secondo che p sarà positivo o negativo il verso sarà quello della normale volta verso il fluido limitato, o l'opposto.

A questa condizione si soddisfa supponendo la superficie completamente prestabilita (il fluido che riempie un recipiente

fisso di forma determinata): o costituita da un'isobarica (§ 560), che se la pressione è nulla si chiama " superficie propria ": o parte prestabilita e parte isobarica o propria.

In ogni caso, se il fluido non è infinitamente esteso, indicando con M la sua massa, e con τ il volume del campo racchiuso dalla superficie totale, dev'essere:

$$\int k \, d\tau = M.$$

Salvo questa condizione, la parte prefissata si potrà stabilire a piacere. Qualunque essa sia, indicando con n la normale nel punto (x, y, z), volta verso il fluido, la pressione (X_n, Y_n, Z_n) in questo punto sarà definita da

$$X_n = p \cos(n\,x), \quad Y_n = p \cos(n\,y), \quad Z_n = p \cos(n\,z),$$

dove p è determinato da (2, § 558).

Invece la superficie limitante non potrà essere costituita da un'isobarica, e quindi esser in particolare superficie propria, se non a condizione che le superficie di livello delle forze limite siano chiuse.

Finalmente, nel terzo caso, ove la superficie sia tutta connessa, la parte prestabilita deve avere gli orli sopra un'isobarica, e il parametro di questa dev'essere il valore di p che compete agli orli medesimi.

Equilibrio d'un fluido grave.

§ 562. — La gravità ammette funzione delle forze, rappresentata, nell'ipotesi che l'asse delle z si assuma orientato come il filo a piombo, da gz. Quindi è conciliabile coll'equilibrio di un fluido perfetto: e le superficie isobariche, corrispondenti a

$$gz = Costante,$$

sono piani perpendicolari al filo a piombo.

Notiamo che, chiamandosi, nel linguaggio famigliare, livello d'un punto il piano orizzontale su cui si trova, da questa proprietà trae origine il termine di superficie di livello, attribuito

in generale alle superficie nei cui punti si mantiene costante la funzione delle forze, e per analogia, la funzione delle velocità, ecc. (§ 76).

Per (4, § 558), nel caso del fluido incomprimibile:

$$p = p_0 + k g (z - z_0),$$

dove p_0 indica il valore di p per $z = z_0$.

Di qui si ha $p = 0$ per

$$z_1 = z_0 - \frac{p_0}{k g},$$

quota d'un piano, ogni pezzo del quale potrà essere la superficie propria del fluido in equilibrio.

Per la formola precedente, p cresce col passare da una superficie di livello ad una inferiore, cioè percorrendo la successione della superficie di livello nel senso del filo a piombo; e perciò in punti al di sopra della superficie propria p non potrebbe ricevere che valori negativi. Ora, coll'idea d'un recipiente propriamente detto si connette l'ipotesi che la pressione specifica in ogni punto della parete sia volta verso il fluido contenuto. E allora, la superficie propria di un liquido grave in equilibrio in un recipiente sarà la parte superiore del suo contorno; cioè il liquido non potrà mantenersi in equilibrio in un recipiente aperto inferiormente, a contatto del vuoto.

Nel caso del fluido incomprimibile a temperatura costante, per (3, § 558):

$$p = p_0 \, e^{a g (z - z_0)},$$

la quale fornisce, per qualunque valore di z un valore di p diverso da zero; per modo che nessuna parte della superficie del fluido in equilibrio potrà essere superficie propria; vale a dire un gas grave, a temperatura costante, non può mantenersi in equilibrio in un recipiente aperto, a contatto del vuoto.

§ 563. — Consideriamo il caso di due fluidi gravi a contatto, formanti un sistema in equilibrio. Verificandosi per ciascuno le precedenti circostanze, la superficie di separazione, la quale sarà superficie di discontinuità per la densità, ma non per la misura della pressione (§ 403), non potrà essere che un

piano perpendicolare al filo a piombo. Indichiamo con ζ e ϖ il corrispondente valore di z e di p, e distinguiamo con uno o due apici le quantità che si riferiscono ai due fluidi. Sarà nel caso di due fluidi incomprimibili:

$$p' = \varpi + k' g (z - \zeta), \qquad p'' = \varpi + k'' g (z - \zeta);$$

nel caso di un fluido incomprimibile e d'un comprimibile (a temperatura costante):

$$p' = \varpi e^{a g (z - \zeta)} \qquad p'' = \varpi + k g (z - \zeta):$$

nel caso di due fluidi incomprimibili (ciascuno a temperatura costante):

$$p' = \varpi e^{a' g (z - \zeta)} \qquad p'' = \varpi e^{a'' g (z - \zeta)} .$$

È poi l'equilibrio stabile, se il fluido di maggior densità si trova al di sotto, come si deduce dal fatto che il potenziale $m g z$ del sistema riceve in questo caso un valor massimo.

Sulla formola barometrica.

§ 564. — La (2, § 558), applicata ad uno strato d'aria atmosferica in equilibrio, abbastanza ristretto per poter sensibilmente supporre che la forza limite sia la gravità, e ammesso che regga per l'aria dello strato la formola dei gas perfetti (§ 543), si riduce a

$$\int^{p} \frac{\theta \, dp}{p} = A g z:$$

la quale implica, come abbiamo notato in generale (§ 558), che la temperatura sia funzione della pressione specifica, donde, nel presente caso, segue che sarà funzione della quota z dei punti rispetto ad un livello fisso. Immaginata una legge opportuna, indicando con p_1, p_2 la " pressione atmosferica " ai livelli estremi dello strato, e con $\Delta \lambda$ la differenza fra la quota del se-

condo e del primo, contate positivamente dal basso in alto, avremo quindi:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\theta\, dp}{p} = - A g \Delta \lambda;$$

relazione che permetterà di dedurre la differenza medesima dalle grandezze della pressione atmosferica ai due livelli, e si chiama una " formola barometrica ", dal barometro, che serve per la misura della pressione atmosferica.

Nell'ipotesi che la temperatura sia sensibilmente costante in tutto lo strato, la formola diventa

$$\log \frac{p_2}{p_1} = - a g \Delta \lambda;$$

la base dell'ordinaria formola barometrica di *Laplace:* la quale si deduce da essa con alcune correzioni, suggerite dall'esperienza, per rimediare alle divergenze tra l'ipotesi e le condizioni effettive, che non è qui il caso di considerare.

Equilibrio di un fluido relativo ad una terna d'assi, l'uno fisso, e gli altri ruotanti uniformemente intorno ad esso.

§ 565. — Supposto l'asse delle $\mathfrak{z}$ fisso, e gli assi delle $\mathfrak{x}$ e $\mathfrak{y}$ ruotanti intorno ad esso con velocità angolare costante di misura ω, alla forza centrifuga corrisponde la funzione delle forze:

$$\frac{1}{2} \omega^2 (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2).$$

Quindi un fluido potrà mantenersi in equilibrio relativo a questa terna d'assi, purchè le forze limite reali ammettano la funzione delle forze, V, come per l'equilibrio assoluto.

L'equazione delle superficie isobariche sarà in tal caso:

$$V + \frac{1}{2} \omega^2 (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) = C; \qquad (1)$$

e questa equazione, pel valore del parametro al quale (s'è possibile) corrisponde $p = 0$, rappresenterà la superficie propria.

Figura d'uno strato liquido aderente e in equilibrio rispetto ad una sfera ruotante intorno ad un proprio diametro.

§ 566. Supponiamo una sfera omogenea, o a strati omogenei, agente colla legge della gravitazione universale, ricoperta da uno strato liquido di grossezza abbastanza piccola, in confronto del suo raggio, per poter sensibilmente trascurare in ogni punto del liquido la componente della forza acceleratrice limite proveniente dallo strato medesimo. Il sistema delle forze limite, ridotte all'attrazione della sfera, ammetterà allora la funzione delle forze (§ 335):

$$\frac{\varkappa^2 M}{r},$$

dove r rappresenta la distanza del relativo punto dal centro della sfera, M la grandezza della massa della sfera, e $\varkappa^2$ la costante della gravitazione universale. Quindi, conformemente a (4, § 558), supposta la sfera ruotante con velocità angolare costante ω intorno ad un suo diametro, e lo strato liquido in equilibrio rispetto ad una terna d'assi invariabilmente uniti ad essa, prendendo il centro per origine e l'asse di rotazione per asse delle $\mathfrak{z}$, la misura della pressione p nel punto qualunque $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ dello strato sarà data da

$$p = \frac{\varkappa^2 M k}{r} + \frac{\omega^2}{2} (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) k + \mathbf{P}; \tag{1}$$

con k indicando la densità del liquido, e le superficie isobariche avranno per equazione:

$$\frac{\varkappa^2 M}{r} + \frac{\omega^2}{2} (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) = C. \tag{2}$$

Questa è l'equazione d'una superficie di rotazione avente per asse l'asse delle $\mathfrak{z}$, simmetrica per rispetto al parallelo passante pel centro (equatore), e segante l'asse in due punti (poli), il cui raggio vettore a, corrispondente a $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$, risulta $\frac{\varkappa^2 M}{C}$;

per modo che, introducendolo nell'equazione, essa può porsi sotto la forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} - \frac{\omega^2}{2\varkappa^2 M}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2), \qquad (3)$$

ossia:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{a\omega^2}{2G}\sin^2\theta\right),$$

posto:

$$\frac{\varkappa^2 M}{a^2} = G, \qquad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = r^2 \sin^2\theta.$$

$\frac{a\omega^2}{2G}$ e $\frac{r}{a}$ sono numeri indipendenti dalle unità di misura, e noi vogliamo supporre il primo e la differenza assoluta fra il secondo e 1 così piccoli da poter trascurare sensibilmente l'aggiunta a 1 d'ogni loro potenza e prodotto. In tal caso:

$$r = a\left(1 + \frac{a\omega^2}{2G}\sin^2\theta\right);$$

equazione d'uno sferoide schiacciato, pel quale, indicando con a' il raggio equatoriale, lo schiacciamento $\frac{a' - a}{a}$ è rappresentato da $\frac{a\omega^2}{2G}$.

La misura della pressione specifica p su questo sferoide, — s'intende, nei punti della sua superficie, dalla parte del fluido — per (1), risulta data da

$$p = \frac{\varkappa^2 M k}{a} + \mathbf{P},$$

la quale mostra che p andrà crescendo col passare da uno sferoide ad un altro da esso compreso, per modo che, supposto che sopra uno di essi p abbia un certo valore, e la stessa p non riceva valori più piccoli, quella sarà il contorno del liquido nell'ipotesi che ai punti della superficie medesima sia applicata la pressione specifica di tale misura. Che se sopra uno sferoide è $p = 0$, e si esclude p negativo, si avrà la superficie

propria. In ogni caso, fissato il suddetto valore, rimanendo disponibile la costante P, si potrà fissare arbitrariamente una coppia di valori di a e di p, colla sola condizione che p non sia minore di quello, e il rapporto di a al raggio della sfera non superi 1 oltre il termine stabilito.

In conclusione, lo strato liquido può mantenersi nel supposto equilibrio relativo con una pressione specifica di misura costante, arbitrariamente fissata, nei punti della superficie formante il contorno, di cui ad arbitrio si può fissare il raggio polare. Scelto questo raggio, a_0, la (3), dove si faccia $a = a_0$, sarà l'equazione di detta superficie, qualunque sia la misura, p_0, della pressione specifica nei punti della superficie medesima. Da questa invece dipende la misura della pressione p sopra ogni sferoide di raggio polare a rappresentato da (3); e per (1) e (3) si ha:

$$p = p_0 + \varkappa^2 M k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right).$$

Il raggio a_0 si potrà dare direttamente, ed anche dedurre dalla massa prefissata dello strato (§ 561), ossia, la densità k del liquido essendo costante, dal suo volume S.

Secondo la nota formola della cubatura dei solidi di rotazione, il volume del solido di cui (3) è l'equazione, posto per brevità $\frac{a \omega^2}{2G} = \sigma$, sarà dato da

$$\pi \int_{-a}^{a} (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2)\, d\mathfrak{z} = \pi \int_{\pi}^{0} r^2 \sin^2\theta \frac{d(r \cos\theta)}{d\theta} d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - 2\sigma + 5\sigma \sin^2\theta) \sin^3\theta \, d\theta,$$

dove nell'ultimo membro si sono ommessi i termini trascurabili per le ipotesi precedenti. Ora:

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3}, \qquad \int_0^{\pi} \sin^5\theta \, d\theta = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}.$$

Quindi il volume in discorso risulta semplicemente:

$$\frac{4}{3}\pi a^3,$$

cioè sensibilmente eguale a quello della sfera avente comune il centro e i poli; e indicando con a_1 il raggio del nucleo sferico, si conchiude:

$$S = \frac{4}{3}\pi(a_0^3 - a_1^3), \quad a_0 = \sqrt[3]{a_1^3 + \frac{3}{4}\pi S}.$$

§ 567. — È ovvia l'applicazione alla figura della superficie del mare tranquillo, nell'ipotesi ideale d'un uniforme rivestimento del Globo.

Preso per a il raggio medio terrestre, per ω la grandezza della velocità angolare del movimento diurno, e per G la grandezza dell'accelerazione di gravità ai poli, si ha (§ 340) prossimamente:

$$\frac{a\omega^2}{2G} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{291}.$$

Così, lo schiacciamento risulta circa metà di quello che per lo sferoide terrestre forniscono le misure geodetiche; e la differenza dei risultati, proveniente dalla diversità fra le ipotesi e le condizioni effettive, ne misura in certo qual modo l'entità.

Figura d'equilibrio relativo ad una terna d'assi in movimento rotatorio uniforme di una massa liquida isolata, nell'ipotesi della forza limite di gravitazione universale.

§ 568. — Su questo problema meglio che sul precedente si può fondare la teoria della forma del Globo Terrestre, e altresì dei vari corpi celesti. Al qual fine non è necessario ammettere che questi corpi, in qualche epoca, abbiano posseduto lo stato fluido; bastando considerare come altra delle ipotesi approssimative quella della fluidità perfetta: la quale, mentre ogni corpo celeste è in realtà fino ad un certo punto cedevole alle azioni che ne possono modificare la figura, è, d'altra parte, la più sem-

plice che si possa fare, quando il movimento implica la possibilità della deformazione del mobile.

Il problema generale si riduce in sostanza a cercare tutte le forme di superficie colle quali riesce soddisfatta la (1, § 565) — se si vuole, con un certo valore della costante C — quando V rappresenti la funzione potenziale di un corpo omogeneo, limitato da una superficie della forma cercata, in un suo punto interno $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ (cfr. § 389).

Qui ci limiteremo al celebre caso che la superficie si supponga *a priori* quella d'un ellissoide, di cui l'asse di rotazione è uno degli assi.*

Allora, assunto, al solito, l'asse di rotazione per asse delle $\mathfrak{z}$, e presi i rimanenti due assi dell' ellissoide per asse delle $\mathfrak{x}$ e delle $\mathfrak{y}$, indicando con $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ le grandezze dei semiassi dell'ellissoide, che si suppone limitare il corpo, la sua equazione sarà:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{b}^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{c}^2} = 1. \qquad (1)$$

D'altra parte, per (1, § 565 e § 391), se questa è la superficie della massa fluida, nel supposto equilibrio relativo, sarà:

$$\left(L - \frac{\omega^2}{2\pi \varkappa^2 k}\right)\mathfrak{x}^2 + \left(M - \frac{\omega^2}{2\pi \varkappa^2 k}\right)\mathfrak{y}^2 + N\mathfrak{z}^2 = P, \qquad (2)$$

dove P rappresenta una costante, e

$$L = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\mathfrak{a}^2 + \lambda)\,\Lambda}, \quad M = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\mathfrak{b}^2 + \lambda)\,\Lambda}, \quad N = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\mathfrak{c}^2 + \lambda)\,\Lambda},$$

$$\Lambda = \sqrt{(\mathfrak{a}^2 + \lambda)\,(\mathfrak{b}^2 + \lambda)\,(\mathfrak{c}^2 + \lambda)}\,.$$

Quindi, se la superficie di cui (1) è l'equazione può formare il contorno della massa fluida in equilibrio relativo, essa deve,

---

* Questo è il lato del problema che, fino a questi ultimi tempi, fu quasi esclusivamente studiato. I primi risultati d'indole generale si trovano enunciati da *Thomson* e *Tait* — V. *Nat. Phil.* § 778.

Il lavoro più completo è la Memoria di *Poincaré* — *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* — pubblicata negli *Acta Mathematica* (1885).

con un conveniente valore di P, riuscire egualmente rappresentata da (2). Per la qual equivalenza è necessario che sia:

$$\left(L - \frac{\omega^2}{2\pi\varkappa^2 k}\right)\mathfrak{a}^2 = \left(M - \frac{\omega^2}{2\pi\varkappa^2 k}\right)\mathfrak{b}^2 = N\mathfrak{c}^2: \qquad (3)$$

due equazioni fra i rapporti $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$, atte a determinarne i valori conformi all'assunta supposizione. Così che la possibilità che un ellissoide sia figura d'equilibrio relativo, nella ipotesi in discorso, si riduce all'esistenza di due radici reali $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}$ di questa coppia d'equazioni: che se esistono, sarà figura d'equilibrio ogni ellissoide i cui semiassi siano $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Supposto l'ellissoide di rotazione, coll'asse del movimento per asse di figura, si trova subito, eseguendo l'integrazione: *

$$L = M = \frac{1}{\varepsilon^3}\left((1+\varepsilon^2)(\arctan\varepsilon) - \varepsilon\right), \quad N = 2\,\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\left(\varepsilon - (\arctan\varepsilon)\right),$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{c}^2}}.$$

E con ciò le due equazioni (3) si riducono all'unica:

$$\frac{(\varepsilon^2+3)(\arctan\varepsilon) - 3\varepsilon}{\varepsilon^3} = \frac{\omega^2}{2\pi\varkappa^2 k};$$

equazione trascendente, che, si trova, per ogni valore del secondo membro compreso fra zero e 0,2246, è soddisfatta da due valori di ε, coincidenti al termine superiore 0,2246. Al termine inferiore zero, corrispondente a $\omega = 0$, le due radici sono zero e ∞. Quindi, con ω abbastanza piccolo, la radice tendente con ω a zero, supposto che si possa trascurare l'aggiunta delle sue potenze superiore alla sesta, per modo che approssimativamente:

$$(\arctan\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1} - \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\varepsilon^5}{5},$$

---

* Giova perciò la sostituzione $\lambda = \mathfrak{c}^2\,\frac{\varepsilon^2 - \lambda'^2}{\lambda'^2}$.

sarà fornita da:

$$\frac{4}{15}\varepsilon^2 = \frac{\omega^2}{2\pi\varkappa^2 k}, \qquad \text{donde:} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi\varkappa^2 k}}\,\omega. \qquad (4)$$

Mentre, per la radice crescente oltre ogni limite, posto (arctan ε) $= \frac{\pi}{2}$, e in confronto di $\frac{\pi}{2}\varepsilon^2$ trascurando $\frac{3\pi}{2} - 3\varepsilon$, si trova subito:

$$\frac{\pi}{2\varepsilon} = \frac{\omega^2}{4\pi\varkappa^2 k}, \qquad \text{donde:} \qquad \varepsilon = \frac{2\pi^2\varkappa^2 k}{\omega^2}. \qquad (5)$$

Pel Globo Terrestre (cfr. § 340), colle unità assolute:

$$\omega = \frac{2\pi}{24.\ 60.\ 60};$$

e se k, a e G rappresentano le grandezze della densità, raggio e accelerazione di gravità *medii*, con sufficiente approssimazione:

$$G = \varkappa^2 \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 k}{a^2}, \qquad \text{donde:} \qquad \varkappa^2 k = \frac{3}{4\pi}\frac{G}{a}.$$

Coi quali dati da (4) si ha per schiacciamento: *

$$\frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{c}}{\mathfrak{c}} = \frac{1}{232},$$

invece di $\frac{1}{300}$, come risulta dalle misure geodetiche (cfr. § 567).

Cogli stessi dati da (1) si ha $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = 680$; e dalle (3), che ammettono radici reali per $\frac{\omega^2}{4\pi\varkappa^2 k} < 0{,}1876$:

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c} = 19{,}57 : 1{,}02 : 1.$$

In quest'ultimo caso la figura ellissoidale d'equilibrio si suol chiamare " l'ellissoide di *Jacobi* „ dal nome di *Jacobi*, che ne dimostrò pel primo la possibilità.

---

* Notisi che, con $\frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{c}}{\mathfrak{c}}$ assai piccolo, si ha subito, trascurando l'aggiunta di termini dell'ordine del suo quadrato, $\frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{c}}{\mathfrak{c}} = \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Principio d'Archimede.

§ 569. — Sia un corpo in equilibrio immerso in un fluido parimente in equilibrio. Di qualunque specie esso sia, risalendo, se vogliamo, alle equazioni fondamentali (1, § 392), le sue condizioni d'equilibrio si stabiliranno componendo col sistema delle forze limite applicate a' suoi punti, e delle pressioni di diversa specie applicate ai punti della sua superficie (se ve ne sono), il sistema delle pressioni specifiche proveniente dal contatto col fluido, che sarà un certo sistema di pressioni, applicato alla superficie comune al corpo e al fluido, dalla parte del corpo. Ora, in ogni punto questa pressione specifica sarà eguale ed opposta a quella che risulta applicata allo stesso punto, concepito come appartenente alla superficie del fluido, per effetto del contatto col corpo immerso: relativa ad un sistema di pressioni applicato alla stessa superficie comune, dalla parte del fluido (§§ 396, 397). E questo si potrà intendere che si determini coi suesposti procedimenti (§ 559).

Sia, in primo luogo, il corpo completamente sommerso, per modo che la sua superficie formi un contorno interno del fluido.

La componente secondo l'asse delle x della risultante del sistema delle pressioni suddette, e del risultante dei momenti del sistema stesso rispetto al punto preso per origine delle coordinate saranno:

$$\int p \cos(nx)\, d\sigma, \qquad \int p\,(y \cos(nz) - z \cos(ny))\, d\sigma,$$

dove n dinota la normale volta verso lo spazio occupato dal corpo, e p, al solito, la pressione nei punti del fluido.

Supponiamo che esista una funzione dei posti del campo rappresentato dal corpo, continua e finita insieme colle sue derivate prime, la quale in ogni punto della superficie del corpo riceva il valor p. Indicandola anche nell'interno con p, i due precedenti integrali si potranno porre sotto la forma (§ 68):

$$-\int \frac{dp}{dx}\, d\tau, \qquad -\int \left(y \frac{dp}{dz} - z \frac{dp}{dy} \right) d\tau;$$

donde si conclude che il sistema in discorso di pressioni applicate ai punti della superficie sarà equivalente ad un sistema di forze applicato ai punti del corpo, tale che le componenti della forza *specifica* (§ 263) nel punto (x, y, z) sono $-\frac{dp}{dx}$, $-\frac{dp}{dy}$, $-\frac{dp}{dz}$.

Supponiamo poi che il fluido presenti una superficie libera sulla quale $p = 0$, cioè una superficie propria, dalla quale il corpo parzialmente emerga: e ammesso che la stessa superficie, completata con un certo pezzo di cui sia contorno la mutua intersezione di essa colla superficie del solido, sia superficie propria del fluido in equilibrio, senza la presenza del corpo, chiamiamo " parte immersa " di questo quella che è limitata dal suddetto pezzo e dalla superficie comune ad esso e al fluido. Allora, se esisterà una funzione dei posti del campo rappresentato da questa parte, finita e continua insieme colle sue derivate, che nei punti del pezzo riceva il valor zero, e il valor p nei punti della superficie rimanente, indicandola con p, si riconoscerà col precedente ragionamento che il sistema delle pressioni applicato ai punti della superficie comune al corpo e al fluido, concepiti come appartenenti al corpo, sarà equivalente a un sistema di forze applicato ai punti della parte immersa tale che la forza specifica nel punto (x, y, z), è la suddetta

$$\left(-\frac{dp}{dx}, -\frac{dp}{dy}, -\frac{dp}{dz}\right);$$

proposizione che abbraccia la precedente.

Sia la gravità la forza limite che determina l' equilibrio, e in tale ipotesi assumiamo, al solito, l'asse delle z orientato come il filo a piombo. Sarà (§ 562):

$$\frac{dp}{dx} = 0, \qquad \frac{dp}{dy} = 0, \qquad \frac{dp}{dz} = kg, \qquad (1)$$

in tutto lo spazio occupato dal fluido, se si suppone la presenza del corpo; che se s'immagina di levarlo, e riempire di nuovo fluido il campo rappresentato dalla sua parte immersa, — se il fluido ha superficie propria, per la precedente definizione, la

parte non sovrastante al piano della superficie medesima (§ 562), — si manterrà l'equilibrio senza alterazione del fluido rimanente, purchè le stesse equazioni si verichino anche in quel campo. Chiameremo " fluido spostato dal corpo „ il fluido che occupa il campo rappresentato dalla parte immersa, in tal condizione da verificarsi in ogni suo punto le (1). Allora, per quanto precede, il sistema delle pressioni applicate ai punti della superficie del corpo, devoluto al suo contatto col fluido, avrà risultante eguale ed opposta al peso del fluido spostato dal corpo, alla quale competerà il centro di massa del fluido spostato medesimo per punto d'applicazione.

Questo è il " principio d'*Archimede* „, che costituisce la base della teoria dell' equilibrio dei corpi immersi e galleggianti. (*)

Fluidi incomprimibili eterogenei.

§ 570. Abbiamo posto il principio che la densità nei punti d'un fluido perfetto non possa variare che come funzione composta colla pressione; e allora, se la densità non dipende dalla pressione, non può essere che costante rispetto ai diversi punti, non altrimenti che ai diversi istanti. In altre parole, subordinatamente a quel principio, un fluido incomprimibile risulta omogeneo (§§ 541, 542).

Si può anche procedere diversamente: riserbare la condizione che la densità sia funzione della pressione ai fluidi " comprimibili „; e definire il fluido " incomprimibile „ come quello in cui la densità d'ogni punto si mantiene invariata, nei diversi posti che occupa il punto nel corso del movimento, vale a dire ai diversi istanti del movimento medesimo.

In tal caso, la condizione che k sia una costante data viene sostituita dalla più generale:

$$\frac{dk}{dt} = 0;$$

(*) *Kirchhoff* — *Mechanik.* — 12te Vorles. § 3.

equazione che, in questa forma, si aggrega senz'altro al sistema di *Lagrange* (§ 551), e posta sotto la forma (§ 174):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{dk}{dx} u + \frac{dk}{dy} v + \frac{dk}{dz} w = 0,$$

si aggregherà al sistema di *Euler* (§ 552).

Nel caso dell'equilibrio, le (1, § 558) danno immediatamente:

$$dp = k\,(X_l\,dx + Y_l\,dy + Z_l\,dz);$$

per modo che debbono verificarsi le condizioni:

$$\frac{dk\,Y_l}{dz} = \frac{dk\,Z_l}{dy}, \qquad \frac{dk\,Z_l}{dx} = \frac{dk\,X_l}{dz}, \qquad \frac{dk\,X_l}{dy} = \frac{dk\,Y_l}{dx},$$

che servono per la determinazione di k in funzione di x, y, z; in seguito a che la precedente equazione, integrata, fornirà p in funzione delle stesse variabili.

Notiamo che, se si suppone che le forze limite (X_l, Y_l, Z_l) ammettano funzione delle forze V, quell'equazione si riduce a

$$dp = k\,dV,$$

per modo che, nel fluido in equilibrio, p e k saranno funzioni di V, e l'una dell'altra.

Fluidi imperfetti.

§ 571. Nei fluidi perfetti, (§ 540), in ogni punto e ad ogni istante, sono nulle:

$$X_x - p, \quad Y_y - p, \quad Z_z - p, \qquad Y_z, \quad Z_x, \quad X_y,$$

dove p rappresenta, in sostanza, una certa funzione del punto e del tempo, che costituisce un'incognita ausiliare del problema. Questa ipotesi, in generale, lascia desiderare un'approssimazione maggiore quando non siano del pari costantemente nulli i parametri di velocità di dilatazione (§ 168):

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz}, \quad \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}, \quad \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}.$$

Ciò che induce ad assumerle come funzioni dei parametri medesimi, che si annullano con essi; e le varie leggi di dipendenza definiscono altrettante specie di " fluidi imperfetti ".

Stabilito che sia:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

nel qual caso il fluido si dice incomprimibile (§ 542), l'ipotesi ordinaria è:

$$X_x = p - 2K\frac{du}{dx}, \quad Y_z = Z_y = -K\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),$$
$$Y_y = p - 2K\frac{dv}{dy}, \quad Z_x = X_z = -K\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$
$$Z_z = p - 2K\frac{dw}{dz}, \quad X_y = Y_x = -K\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right);$$

ciò che torna supporre la differenza fra le pressioni principali nel punto e all'istante considerato e p rispettivamente $-2K\lambda_1$, $-2K\lambda_2$, $-2K\lambda_3$, indicando con K una costante, e con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i moduli di dilatazione principali, e le direzioni di pressione e di velocità di dilatazione principali fra loro coincidenti, e tali che scambiando fra loro due delle prime, si scambiano le corrispondenti delle seconde (cfr. § 526).

Introducendo queste relazioni nelle (1, § 399), si ottiene, col solito significato dei simboli:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{1}{k}\frac{dp}{dx} - \frac{K}{k}\Delta u = X_t,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} + \frac{1}{k}\frac{dp}{dy} - \frac{K}{k}\Delta v = Y_t,$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} + \frac{1}{k}\frac{dp}{dz} - \frac{K}{k}\Delta w = Z_t,$$

dove:

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

che sono le equazioni da sostituire alle (2, § 552) del sistema di *Euler*, nel caso presente.

Linee e superficie materiali.

§ 572. Accenneremo infine alle " linee materiali „ e " superficie materiali „, che giova considerare in certi problemi; e sono mobili che si concepiscono avere estensione ad una e a due dimensioni rispettivamente; secondo il qual concetto, la teoria del loro movimento si sviluppa cogli stessi principii che abbiamo esposto, soltanto che, invece che dalla figura materiale, come l'abbiamo definita, si prende le mosse da un mobile, dotato dei corrispondenti attributi, rappresentato da una linea o da una superficie, il cui movimento si suppone poter essere collegato, se occorre, con quello delle figure materiali ordinarie. Così, ad ogni linea e superficie materiale viene a competere una certa massa, la cui grandezza ha per espressione:

$$\int_{\varrho} k_{\varrho}\, d\varrho, \qquad \int_{\sigma} k_{\sigma}\, d\sigma;$$

e l'unità s'intende l'ordinaria unità di massa $[m]$, per modo che $[k_{\varrho}] = [l^{-1} m]$, $[k_{\sigma}] = [l^{-2} m]$. Le k_{ϱ}, k_{σ} si chiamano la grandezza della densità " lineare „ e " superficiale „ nel relativo punto.

Siffatti mobili si potranno considerare, se capita, come rappresentazione approssimativa di corpi, di cui due dimensioni, o una, sono insensibili — corpi in forma di fili, o di fogli, abbastanza sottili; mentre altre volte vogliono esser concepiti come finzioni, introdotte per semplicità e comodità di discorso; non altrimenti del punto materiale. Finzioni, se si vuole, rispetto al *corpo naturale,* quale l'abbiamo definito; che, per conchiudere, il corso di questa trattazione avrà messo in evidenza come ce ne vagliamo, alla sua volta, a modo di immagine o di modello, atto a rilevare alcuni mutui rapporti dei fenomeni che i corpi realmente esistenti manifestano all'Esperienza, chiarendo le riserve fatte in principio a proposito dello scopo della Meccanica.

FINE.

INDICE ALFABETICO

(I numeri indicano il paragrafo.)

D

E

F

R

S

T

U

V

AGGIUNTE E CORREZIONI

(Ove il richiamo è formato con due numeri, il primo indica la pagina, e il secondo la linea: il quale, se coll'apice, è contato dal basso, senza computare le note a piedi di pagina, e diversamente dall'alto.)

(Prefazione.) La stampa di questo libro, per varie circostanze, si è prolungata per più d'un anno; e nel frattempo hanno veduto la luce parecchie notevoli pubblicazioni: fra le quali cospicuo il libro del compianto *Enrico Hertz*, che forma il terzo volume delle *Gesammelte Werke*, dal titolo " *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt* " (Leipzig, 1894). Per questo non ho modificato, sotto alcun aspetto, il mio trattato; tanto più che quei lavori sono informati a principii sostanzialmente diversi. Bensì vi ho trovato, nella concordanza, un prezioso appoggio a più d'un'idea a me venuta: specialmente nel *Hertz*: il quale comincia coll'affermare l'opportunità d'una riforma dell'ordinaria esposizione della Meccanica Razionale; soltanto che la propone assai più larga e profonda: mentre, coi termini dell'Introduzione, — studio preliminare del maggior interesse intorno ai varii sistemi d'esposizione della Meccanica — la nostra resta semplicemente una trasformazione della " prima immagine " o " rappresentazione ". Egli però riserba il suo libro ad un lettore che, istruito coll'ordinaria esposizione, sia sufficientemente pratico dell'argomento (Prefazione, pag. XXIV): laddove noi crederemmo che il nostro, composto con intento più espressamente didattico, possa guidare alla conoscenza dei principii della teoria del movimento dei corpi, colla sola scorta dell'analisi infinitesimale.

(14, 5.) Correggasi $\beta_2\ \gamma_3$ in $\beta_3\ \gamma_2$.

(14, 12'.) Correggasi η in ζ.

(§ 40.) Si dirà spesso che (M_x, M_y, M_z) è il momento, rispetto al punto (a, b, c) come polo, del vettore applicato di cui (X, Y, Z) è il vettore e (x, y, z) punto d'applicazione, in conseguenza delle relazioni stabilite in questo §, senz'altro. Quando della quantità dei vettori si considera la sola grandezza assoluta, questo si riduce alla definizione del momento. In quei casi in cui si distingue il segno, intenderemo che questo, non incluso nelle relazioni medesime, sia lo stesso per le misure delle quantità d'ambedue i vettori; ossia i loro assi volti, l'uno rispetto all'altro, nel debito modo.

Al qual proposito, giova rilevare che, essendo il vettore dalla sua quantità e orientazione, ossia dalle sue componenti, completamente definito, va inteso che il segno della misura, o il senso dell'asse, si possa scegliere, generalmente, a piacere, non altrimenti che l'unità di misura.

(22, 1'.) Si termini il capoverso, aggiungendo " collo stesso asse o l'opposto a seconda del senso dell'asse del vettore medesimo ".

(27, 3-5.) S'inverta il segno dell'espressione di $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$.

(§ 64.) Alla condizione che la funzione V sia finita e continua giova sostituire, nella definizione dell' integrale, quella, più ampia, che abbia limite inferiore e superiore finito; e, in tal caso, all' inciso " *esistente nelle suddette ipotesi* " si surrogherà " *esistente nell' ipotesi che la funzione V sia continua* ".

(38, 5'.) Ad (a_1, b_1, c_1) si premetta V.

(39, 1.) Si premetta " l' integrale $\int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ " a " si chiama ".

(40, 11'.) Correggasi " dei " in " di ".

(48, 8'-13'.) Scambisi " sin φ " con " $-$ sin φ ".

E premettasi l'osservazione che lo spostamento in discorso potrebbe essere semplicemente traslatorio: escluso il qual caso, l'angolo φ riesce necessariamente diverso da zero.

(49 10'.) Correggasi " dell' iniziale " in " della finale ".

(56, 5'.) Lo spostamento si può anche definire, e meglio, come quello per cui lo spostamento d' ogni punto (x, y, z) è il momento del vettore applicato definito dal vettore (p, q, r), e dall'origine, rispetto allo stesso punto d'applicazione come polo (cfr. § 147. Del resto tutte le conseguenze rimangono chiaramente le stesse.

(59, 9'.) Aggiungasi dopo (4) " $\theta = \frac{\pi}{2}$, e ". E notiamo che si potrà anche limitarsi ad attribuire a θ in (4) il valore assoluto, per chiamare $\Delta\,\theta$ scorrimento mutuo dei due assi, l'uno rispetto all'altro.

(§ 102.) Giova per lo studio dell'argomento di questo §, ed è per sè stesso interessante, rilevare che i coefficienti d'uno spostamento (dislocatorio semplice) estremamente piccolo risultante di due o più altri, del pari estremamente piccoli, secondo la posta definizione, sono la somma dei coefficienti analoghi relativi a questi spostamenti: nella qual proposizione consiste il " teorema della sovrapposizione degli spostamenti estremamente piccoli ". Ciò posto, dalla circostanza che i coefficienti di dilatazione lineare e cubica sono nulli per lo spostamento pseudoratorio componente d' un dato spostamento estremamente piccolo scaturisce senz'altro che le stesse quantità hanno egual valore per detto spostamento e pel componente simmetrico.

(64, 6.) Correggasi $\frac{1}{q}$ in $\frac{1}{2q}$.

(66, 9'.) Correggasi (§ 101) in (§ 102).

(67, 5'-6'.) Levisi " rispetto " dalla riga 6' e si porti nella 4'. davanti " al tempo ".

(88, 12'.) Leggasi: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = C_2$.

(89, 14.) Invece di " è " leggasi " si può definire come ".

(94, 12-18.) Aggiungasi il caso che le velocità angolari siano eguali, cioè eguale la grandezza e concorde il verso, il quale evidentemente non muta le conclusioni.

(95, 1-3.) Alle parole " nella posizione simmetrica rispetto all' asse " si sostituisca " a distanze dai due assi in quel rapporto, dalla parte dell'asse ".

(98, 15.) Correggasi " asse " in " atto ".

(§ 163.) Analogamente a quanto si osservò a proposito del § 102, si potrà intendere che θ rappresenti il valore assoluto, per definire $-\frac{d\theta}{dt}$ come modulo di scorrimento mutuo dei due assi (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$.

(115, 19.) Si corregga 𝔊 in 𝔖.

(115, 18-24.) In ciò consiste la proposizione così detta del "parallelogrammo delle velocità".

(117, 3'.) Correggasi (1, § 176) in (1, § 177).

(131, 10.) Correggasi nell'ultima formola y_0 in v_0.

(131, 12'.) Correggasi w_0 in u_0.

(132, 2.) Correggasi "è costante" in "è di grandezza costante".

(134, 6.) Correggasi (2, § 197) in (3, § 197).

(§ 199, ***Movimento centrale.***) Le formole dedotte nel § 199, comunque s'intenda fissato l'istante donde si conta il tempo t, a cui corrisponde (θ_0, r_0), valgono, come stanno scritte, per un intervallo comprendente detto istante, in tutto il quale $\frac{dr}{dt}$ non ha segno diverso che all'istante medesimo: per modo che non si deve mai assumere con segno diverso

$$\sqrt{ar^2 + 2br - 1}$$

ossia

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{1}{r} - b}{\sqrt{a + b^2}}\right)^2},$$

cui va premesso quello di $\frac{dr}{dt}$ o il contrario secondo che A è positivo o negativo — cioè il movimento del punto nel senso in cui cresce θ o nell'opposto. Supponiamo, per fissare le idee, $b > 0$. Questo radicale si annulla per

$$\frac{1}{r} = b(1 \pm e), \qquad e = \sqrt{1 + \frac{a}{b^2}};$$

due valori, dei quali, tenendo calcolo che r non può essere negativo, e inteso che sia finito, si deve scartare, nelle ipotesi $e \geqq 1$, quello relativo al segno $-$: mentre, con qualunque valore di e, la (3) fornisce per l'altro $\theta = \Theta$. E se l'origine dei tempi si sceglie in modo da corrispondervi il posto così definito — evidentemente il vertice del ramo iperbolico, o della parabola, o uno dei due vertici, quello ch'è più vicino al centro delle accelerazioni, dell'ellisse, che costituisce, a norma del caso, la trajettoria — oltre di che s'intende l'asse polare volto verso il punto medesimo, si ha:

$$\theta = \pm \left(\arccos \frac{\frac{1}{r} - b}{\sqrt{a + b^2}}\right),$$

dove il segno è quello del suddetto radicale, e le formole in discorso reggono, tenuto calcolo di questo segno, senza alcuna restrizione, per ogni intervallo di tempo corrispondente ad una variazione dell'angolo θ fra i limiti $-\pi$ e π. — Analogamente nel caso di $b < 0$.

(144, 5'.) Correggasi $\mathfrak{U}_0 + \omega\rho_0$ in $\mathfrak{U}_0 - \omega\rho_0$.

(152, 12.) Correggasi $\int \frac{d^2 x}{dt^2}\, dt$ in $\int_{\Delta\tau} \frac{d^2 x}{dt^2}\, d\tau$.

(152, 3', e 14'.) Correggasi (§ 214) in (§ 213).

(154, 5'.) Correggasi $\int \lambda\, d\tau$ in $\int k \lambda\, d\tau$.

(162, 4.) Correggasi “ chiusa „ in “ sferica „.

(173, 3'.) Sopprimasi “ doppio „.

(184, 4'.) Correggasi “ specifica „ in “ acceleratrice „.

(187, 7-9.) Si applichi alla triplice equazione il numero d'ordine (1).

(199, 15'.) Invece di “ funzione simmetrica dei due punti „ più chiaramente dicasi “ funzione simmetrica rispetto ai due punti „, dovendosi intendere che non muti di valore, scambiando così i posti come le velocità, ad ogni istante: ciò che ha luogo, ad esempio. con una funzione simmetrica dei due posti e di $\frac{dr}{dt}$.

(199, 1'.) Si scambino + e —.

(§ 299.) Al doppio integrale va premesso ±.

(204, 10.) Correggasi $qx - rz$ in $rx - pz$.

(205. 11.) Correggasi (2, § 257) in (1, § 257).

(207, 8'.) Correggasi A in $\frac{1}{2} A$.

(217, 5-6.) Sopprimansi le parole “ e non dipende esplicitamente dal tempo „.

(219, 8'.) Correggasi “ interne „ in “ esterne „.

(222. 4.) Correggasi (§ 429) in (§ 249.)

(§ 326.) Rilevisi infine la proprietà importante, che occorre anche per l'applicazione che si fa, nel seguente § 327, della regola di *Dirichlet* (§ 325) all'equilibrio relativo, che il lavoro del sistema delle forze centrifughe composte applicato ai punti del corpo, corrispondente ad uno spostamento qualsiasi, conseguito col supposto movimento relativo, è nullo; come immediatamente scaturisce dall'essere, per ogni punto, fra loro perpendicolari l'accelerazione centrifuga composta e la velocità relativa —.

(224, 13-14'.) L'inciso si cambii così: — questo, s'intende, nel caso che la forza elementare implica la condizione che la distanza dei due punti cui si riferisce abbia limite inferiore positivo.

(239, 10'.) Correggasi “ momento „ in “ movimento „.

(§ 349.) È ovvio che, prestabilendo una proprietà del movimento, oltre le condizioni, che, quando fosse nota la legge elementare, varrebbero a determinarlo, si vien a definire, in grado pari al movimento, anche questa legge, e cioè una particolare condizione fisica del mobile (§ 232). Giova intender questa come uno stato da prefissarsi (lo stato naturale, magnetico, elettrico) di una particolare sostanza. Infatti, ogni movimento definito dalla Meccanica costituisce un tipo, a cui più o meno si approssimano, nelle debite condizioni, i movimenti effettivi; e d'altra parte l'Esperienza insegna che occorre una particolare qualità di corpi, perchè a date circostanze segua un movimento di forma, anche approssimativamente, prestabilita. Conformemente a ciò, ammesso lo stato naturale, ci potremo valere, in ogni caso, della forza elementare di *Newton*, per calcolare la forza acceleratrice esterna in un punto, colla condizione che la sua minima distanza dai punti dei corpi donde è determinata superi il limite occorrente (§ 331).

(247, 10.) Correggasi M_y in M_z.

(249, 3'-16'.) A determinare X, Y, Z e M_x, M_y, M_z, nel caso più generale, concorrerà l'atto di movimento dei singoli corpi. Quindi si devono generalmente intendere funzioni, oltre che delle variabili individuanti la posizione, anche del